۱- کاهش می‌یابد، میزان غیرخطی بود شکل مود افزایش یافته و لذا تخمین با سیستم خطی از شکل مود واقعی فاصله می‌گیرد

۲- توابع حدس باید شامل توابع متقارن و پادمتقارن باشند

۳- (سوال اول تکلیف سری چهارم) از آنجا که نیروی خارجی نداریم مسئله مقدار مرزی بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = m(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; \quad u(0,t) = 0, \quad \left[EA(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]_{x=L} = ku(L,t)$$

در این حالت مسئله مقدار ویژه بصورت زیر خواهد بود:

$$-\frac{d}{dx}\left[EA(x)\frac{dU(x)}{dx}\right] = \omega^2 m(x)U(x); \quad U(0) = 0, \quad \left[EA(x)\frac{dU(x)}{dx}\right]_{x=L} = kU(L) \rightarrow$$

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + \beta^2 U(x) = 0; \quad \ni \beta^2 = \omega^2\frac{m}{4kL}; \quad U(0) = 0, \quad \left[\frac{dU(x)}{dx}\right]_{x=L} = \frac{U(L)}{4L}$$

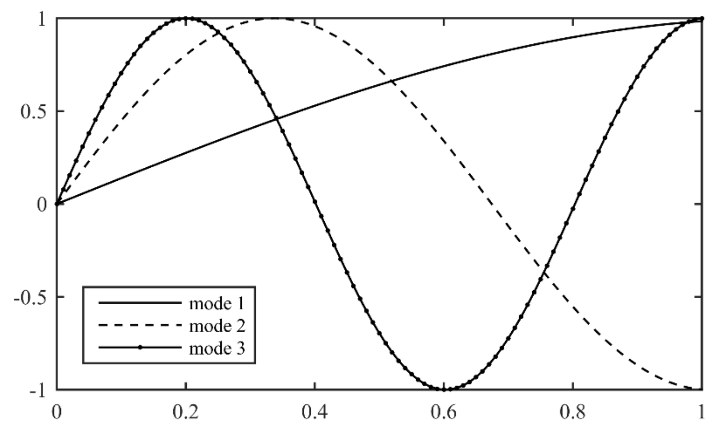
حل معادله دیفرانسیل بصورت زیر است:

$$U(x) = Acos(\beta x) + Bsin(\beta x)$$

$$U(0) = 0 \rightarrow A = 0$$

$$\left[\frac{dU(x)}{dx}\right]_{x=L} = \frac{U(L)}{4L} \rightarrow \tan(\beta L) = 4\beta L \rightarrow \begin{cases}\beta L = 1.3932\\ \beta L = 4.6588\\ \beta L = 7.8220\end{cases} \rightarrow \omega^2 = \begin{cases}2.7864\\ 9.3176\\ 15.644\end{cases}$$

$$U(x) = \sin(\beta x)$$



۴- الف) در این حالت باید توابع حدس شرایط مرزی را ارضا کنند. لذا لازم است که:

$$\phi_i(0) = \left[\frac{d\phi_i(x)}{dx}\right]_{x=0} = 0; \qquad \phi_i(L) = \left[\frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2}\right]_{x=L} = 0 \rightarrow \phi_i(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^{i+1}\left(\frac{x}{L} - 1\right)^{i+2}$$

ب) می‌دانیم که $y(x,t) = \sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)q_i(t)$

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_0^L m(x)\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]^2 dx \rightarrow$$

$$m_{ij} = \int_0^L m(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx = m\int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^{i+j+2}\left(\frac{x}{L}-1\right)^{i+j+4}dx = mL\int_0^1 \xi^{i+j+2}(\xi-1)^{i+j+4}d\xi$$

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]^2 dx \rightarrow k_{ij} = \int_0^L EI(x)\phi_i''(x)\phi_j''(x)dx =$$

$$EI\frac{(i+1)(j+1)}{L^3}\int_0^1 \left[\xi^{i-1}(\xi-1)^i\{i(\xi-1)^2+2(i+2)\xi(\xi-1) + (i+2)\xi^2\}\right].\left[\xi^{j-1}(\xi-1)^j\{j(\xi-1)^2+2(j+2)\xi(\xi-1)+(j+2)\xi^2\}\right]d\xi$$

با فرض $n = 3$ داریم:

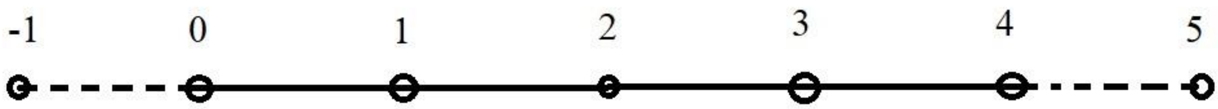
$$M = 10^{-3}mL\begin{bmatrix} 0.4329 & -0.0971 & 0.0222 \\ -0.0971 & 0.0222 & -0.0051 \\ 0.0222 & -0.0051 & 0.0012 \end{bmatrix}; \quad K = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 0.3429 & -0.0667 & 0.0139 \\ -0.0667 & 0.0208 & -0.0054 \\ 0.0139 & -0.0054 & 0.0016 \end{bmatrix}$$

با حل مسئله مقدار ویژه داریم:

$$\omega_1 = 27.57\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}; \quad \omega_2 = 128.65\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}; \quad \omega_3 = 384.52\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

۵- برای یک تیر یکنواخت با شرایط مرزی داده شده معادله مشخصه سیستم بصورت زیر است:

$$\frac{d^4Y}{dx^4} - \beta^4 Y = 0; \ \ni \ \beta^4 = \omega^2\frac{m}{EI} \quad Y(0) = \left[\frac{d^2Y(x)}{dx^2}\right]_{x=0} = Y(L) = \left[\frac{d^2Y(x)}{dx^2}\right]_{x=L} = 0$$



$$Y_0 = Y_4 = 0$$

$$Y_{-1} = -Y_1; \quad Y_5 = -Y_3$$

$$\left(\frac{4}{L}\right)^4(Y_{-1} - 4Y_0 + 6Y_1 - 4Y_2 + Y_3) - \beta^4 Y_1 = 0$$

$$\left(\frac{4}{L}\right)^4(Y_0 - 4Y_1 + 6Y_2 - 4Y_3 + Y_4) - \beta^4 Y_2 = 0$$

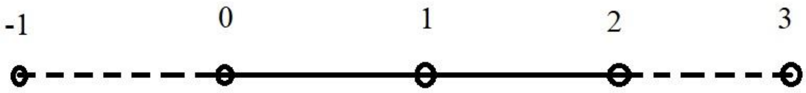
$$\left(\frac{4}{L}\right)^4(Y_1 - 4Y_2 + 6Y_3 - 4Y_4 + Y_5) - \beta^4 Y_3 = 0$$

با ساده سازی:

$$\left\{\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} - \frac{L^4}{256}\beta^4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = 0 \rightarrow \omega^2 = \begin{Bmatrix} 0.0013 \\ 0.0156 \\ 0.0455 \end{Bmatrix}\frac{EI}{mL^4}$$

۶- برای یک تیر یکنواخت با شرایط مرزی داده شده معادله مشخصه سیستم بصورت زیر است:

$$\frac{d^4Y}{dx^4} - \beta^4 Y = 0; \quad Y(0) = \left[\frac{d^2Y(x)}{dx^2}\right]_{x=0} = \left[\frac{d^2Y(x)}{dx^2}\right]_{x=L} = 0; \quad \left[EI\frac{d^3Y(x)}{dx^3}\right]_{x=L} = kY(L)$$



با توجه به معادله مشخصه، شرایط مرزی و شکل فوق داریم ($h = \frac{L}{2}$):

$$\frac{16}{L^4}[Y_{-1} - 4Y_0 + 6Y_1 - 4Y_2 + Y_3] - \beta^4 Y_1 = 0$$

$$Y_0 = 0$$

$$Y_{-1} - 2Y_0 + Y_1 = 0$$

$$Y_1 - 2Y_2 + Y_3 = 0$$

$$\frac{4}{L^2}\{-Y_0 + 2Y_1 - 2Y_3 + Y_4\} = Y_2$$

همانگونه که دیده می‌شود در معادله Y_4 وجود دارد، لذا لازم است که یک معادله دیگر بنویسیم. معادله دیفرانسیل باید در نقطه ۲ نیز برقرار باشد لذا داریم:

$$\frac{16}{L^4}\{Y_0 - 4Y_1 + 6Y_2 - 4Y_3 + Y_4\} - \beta^4 Y_2 = 0$$

با جایگزینی $L = 1$ و ساده‌سازی داریم:

$$\frac{\beta^8}{32} - \frac{19}{2}\beta^4 + 224 = 0 \rightarrow \beta^4 = 9.0847$$