- برنامه ریزی تصادفی (Stochastic Programming)

- فرایند تصادفی (Stochastic Process : بدست آوردن مقدار یک متغیر تصادفی در طول زمان

مثال: قیمت ساعتی برق در دو ساعت متوالی

✓ متغیر تصادفی نشان دهنده قیمت برق در ساعت 12 ظهر :

50 $/mwh با احتمال 0.2

46 $/mwh با احتمال 0.6

44 $/mwh با احتمال 0.2

✓ متغیر تصادفی نشان دهنده قیمت برق در ساعت 1 PM :

حالت اول: احتمال اینکه قیمت برق در ساعت 1 PM، 52، 48، 45 $/mwh باشد 0.8، 0.1، 0.1 است.

حالت دوم: " " 0.2، 0.7، 0.1 است.

حالت سوم: " " 0.1، 0.4، 0.5 است.

این دو متغیر تصادفی وابسته به هم: قیمت در ساعت 12 و قیمت در ساعت 1 PM، یک فرایند تصادفی را تشکیل می دهد.

- سناریو (scenario)

یک راه ساده برای توصیف فرایندهای تصادفی از طریق سناریوهاست.

مقدار متغیر تصادفی X در نقطه ω : $x = X(\omega)$ را تحقق X گویند (realization).

$\omega \in \Omega$ شاخص سناریو

سناریو، یک تحقق واحد از یک فرایند تصادفی است.

- برای مثال قبل، سناریوهای قیمت به شکل زیر است :

سناریو	قیمت در ساعت 12 $/mwh	قیمت در ساعت 1 PM $/mwh	احتمال
1	50	52	0.2 x 0.8 = 0.16
2	50	48	0.2 x 0.1 = 0.02
3	50	45	0.2 x 0.1 = 0.02
4	46	52	0.6 x 0.2 = 0.12
5	46	48	0.6 x 0.7 = 0.42
6	46	45	0.6 x 0.1 = 0.06
7	44	52	0.2 x 0.1 = 0.02
8	44	48	0.2 x 0.4 = 0.08
9	44	45	0.2 x 0.5 = 0.1

در این مثال، تعداد سناریوها کم است و نیازی به کاهش سناریو نیست.

اما در مسائل تصمیم گیری واقعی دارای عدم قطعیت، به این شکل نیست.

- مسائل دومرحله‌ای two-stage

دو متغیر تصمیم‌گیری x و y داریم. تصمیم x قبل از دانستن مقدار واقعی فرایند تصادفی λ گرفته می‌شود.
تصمیم y بعد از تحقق λ انجام می‌شود.

بنابراین تصمیم y به تصمیم x و تحقق $\lambda(w)$ وابسته است ← $y(x,w)$

- فرایند تصمیم‌گیری: ۱- انجام تصمیم x

۲- تحقق فرایند تصادفی λ به عنوان $\lambda(w)$

۳- تصمیم $y(x,w)$ انجام می‌شود.

مسائل برنامه‌ریزی تصادفی می‌تواند به دو روش فرمول‌بندی شود:

node-variable ← متغیرهای مرتبط با نقاط تصمیم‌گیری

scenario-variable ← متغیرهای مرتبط با سناریوها

- مثال: two-stage Node-variable

برای یک مصرف کننده، عدم قطعیت در میزان مصرف و قیمت برق برای هفته آینده وجود دارد.

اطلاعات سناریوها:

سناریو	احتمال	مصرف MW	قیمت \$/MWh
1	0.2	110	50
2	0.6	100	46
3	0.2	80	44

همچنین مصرف کننده با یک قرارداد دوجانبه قبل از هفته آینده (قبل از دانستن مقادیر واقعی مصرف و قیمت برق) می‌تواند تا 90^{MW} برق را در هفته آینده با قیمت 45 $/MWh خریداری کند.

این مسئله تصمیم‌گیری برای مصرف کننده می‌تواند به عنوان یک مسئله برنامه‌ریزی تصادفی دومرحله‌ای مدل شود.

مرحله اول: مصرف کننده باید تصمیم بگیرد که چه مقدار برق از طریق قرارداد بخرد.

مرحله دوم: خرید برق با هر یک از سه سناریوی ذکر شده

$$\text{Minimize} \quad C^s = 168\,(45P^c + 0.2\times 50\,P_1 + 0.6\times 46\,P_2 + 0.2\times 44\,P_3)$$

$$\text{s.t.} \quad P^c + P_1 \geq 110$$
$$P^c + P_2 \geq 100$$
$$P^c + P_3 \geq 80$$
$$0 \leq P^c \leq 90$$
$$P_1, P_2, P_3 \geq 0$$

P^c: برق خریداری شده از طریق قرارداد دوجانبه (bilateral contract)

P_1, P_2, P_3: برق خریداری شده از pool طبق سناریوهای ۱ و ۲ و 3

تابع هدف، امید ریاضی هزینه مصرف کننده است.

برای بدست آوردن انرژی مصرف شده در طول یک هفته، توان مصرفی را در تعداد ساعات هفته (168 ساعت) ضرب می‌کنیم.

جواب مسئله : $P^{c*} = 80$ و $P_1^* = 30$ ، $P_2^* = 20$ و $P_3^* = 0$ MW

$C_s^* = 747936$ \$

یعنی قبل از شروع هفته، 80MW برق از طریق قرارداد روزانه خریداری می‌شود و 30MW ، 20 ، 0 از طریق سه سناریو

- مثال: two-stage scenario-variable

$$\text{Minimize} \quad C^P = 0.2 \times 168 (45 P_1^c + 50 P_1) + 0.6 \times 168 (45 P_2^c + 46 P_2) + 0.2 \times 168 (45 P_3^c + 44 P_3)$$

s.t.

$$P_1^c + P_1 \geqslant 110$$
$$P_2^c + P_2 \geqslant 100$$
$$P_3^c + P_3 \geqslant 80$$
$$0 \leqslant P_1^c , P_2^c , P_3^c \leqslant 90$$
$$P_1 , P_2 , P_3 \geqslant 0$$
$$P_1^c = P_2^c = P_3^c \rightarrow \text{non-anticipativity}$$

$P_1^c ، P_2^c ، P_3^c$: برق خریداری شده از طریق قرارداد با سناریوهای 1، 2، 3

P_1 و P_2 و P_3 : برق خریداری شده از Pool طبق سناریوهای 1، 2، 3

جواب حل مثال قبلی می‌شود.

✓ اگر قید non-anticipativity را حذف کنیم:

$P_1^{c*} = 90$ و $P_2^{c*} = 90$ و $P_3^{c*} = 0$ و $P_1^* = 20$ ، $P_2^* = 10$ ، $P_3^* = 80$ MW

$C^{P*} = 74256$

- تصمیم گیری multi-stage

برای مثال یک تصمیم گیری r مرحله‌ای به این صورت است:

۱- انجام تصمیم x_1

۲- تحقق فرایند تصادفی $\lambda_1(w_1)$

۳- انجام تصمیم $x_2(x_1, w_1)$

۴- تحقق فرایند تصادفی $\lambda_2(w_2)$

۵- انجام تصمیم $x_3(x_1, w_1, x_2, w_2)$

⋮

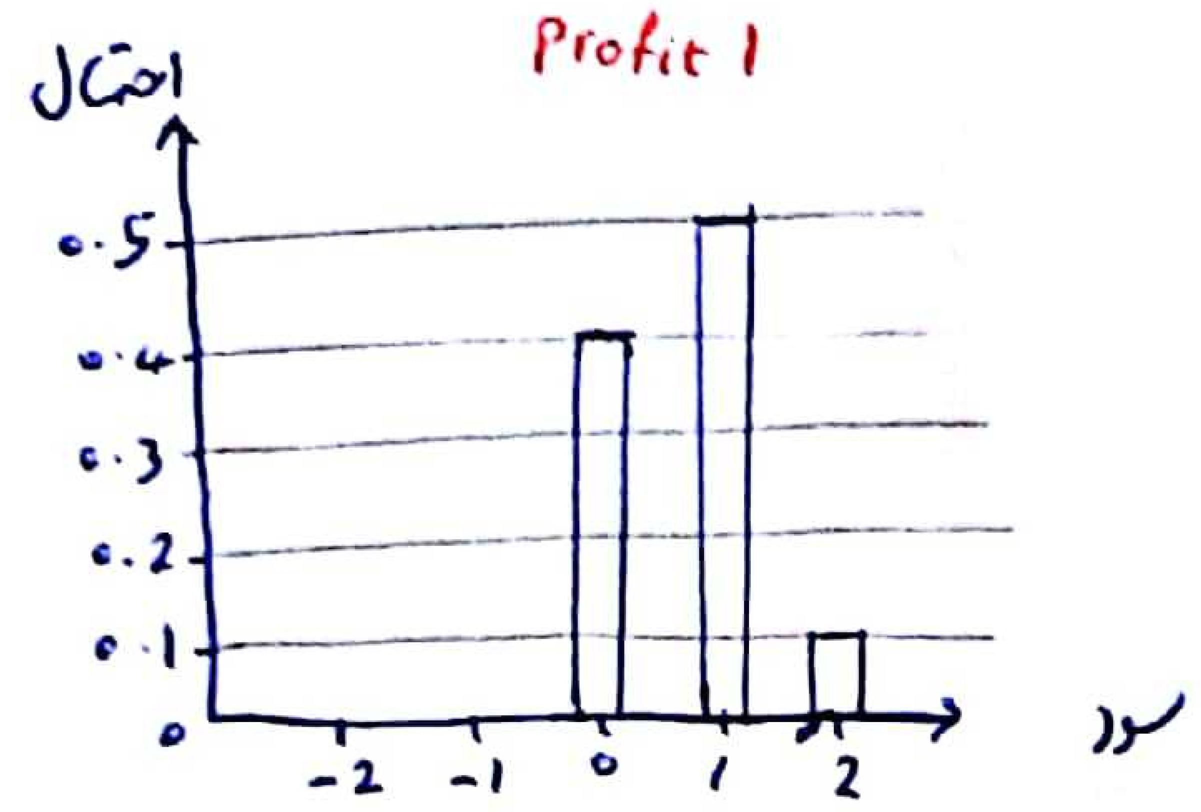
۲r-۲ - تحقق فرایند تصادفی $\lambda_{r-1}(w_{r-1})$

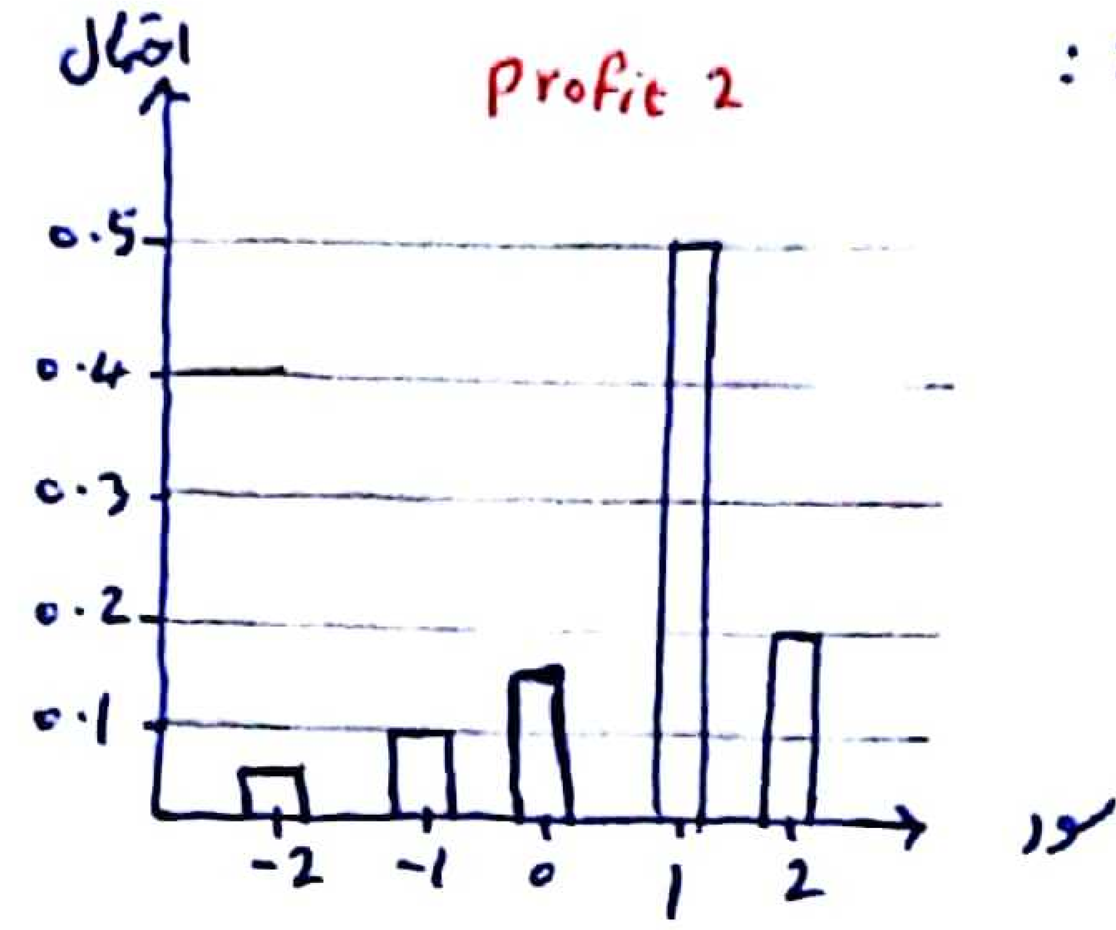
۲r-۱ - انجام تصمیم $x_r(x_1, w_1, \ldots, x_{r-1}, w_{r-1})$

- ریسک Risk

معمولاً در مسائل برنامه‌ریزی تصادفی، تابع هدف سود (Profit) ماکزیمم می‌شود یا هزینه (cost) مینیمم می‌شود و ریسک لحاظ نمی‌شود. اگر ریسک در نظر گرفته شود، تصمیم‌گیر علاوه بر مقدار امید ریاضی سود، مقدار سود مربوط به بدترین سناریو را نیز ارزیابی می‌کند.

PMF دو متغیر سود ۱ و سود ۲:





مقدار امید ریاضی هر دو متغیر برابر 0.7 است.

برای متغیر Profit 1 مقدار سود همیشه مثبت است. اما برای متغیر تصادفی Profit 2 احتمال منفی بودن سود 0.15 است.

یعنی ریسک متغیر Profit 2 بیشتر است.

- مسائل برنامه‌ریزی تصادفی دارای قیود پیچیده و زیادی هستند. از روش‌های تجزیه (decomposition) برای حل این مسائل استفاده می‌شود.

فرایند تصادفی پیوسته: سرعت باد در ساعت t در طول روز

v_t , $t=1, \dots, 24$

فرایند تصادفی گسسته: در دسترس بودن واحد i در ساعت t در طول یک هفته

u_{it} , $t=1,2,\dots,168$

اگر واحد i در ساعت t در دسترس باشد، $u_{it}=1$، در غیراینصورت $u_{it}=0$

- توصیف یک فرایند تصادفی گسسته:

بطور مثال فرایند تصادفی U_i نشان دهنده در دسترس بودن واحد تولیدی i در یک بازه دو ساعته است.

$$U_i(w) = [u_{i1}(w), u_{i2}(w)] , \quad w=1,\dots,4$$

سناریوهای U_i را می‌توانند به شکل زیر نوشته شود:

$$U_i(1) = [1,1] , \ P=0.5$$
$$U_i(2) = [0,1] , \ P=0.2$$
$$U_i(3) = [1,0] , \ P=0.2$$
$$U_i(4) = [0,0] , \ P=0.1$$

- حل مسائلی که عدم قطعیت داده‌های ورودی آن‌ها با فرایندهای تصادفی پیوسته مدل شده است، بسیار دشوار است.
بنابراین یک فرایند تصادفی پیوسته را به صورت تقریبی با یک فرایند گسسته جایگزین می‌کنند.

- تقریب زدن یک فرایند تصادفی پیوسته با فرایند تصادفی گسسته:

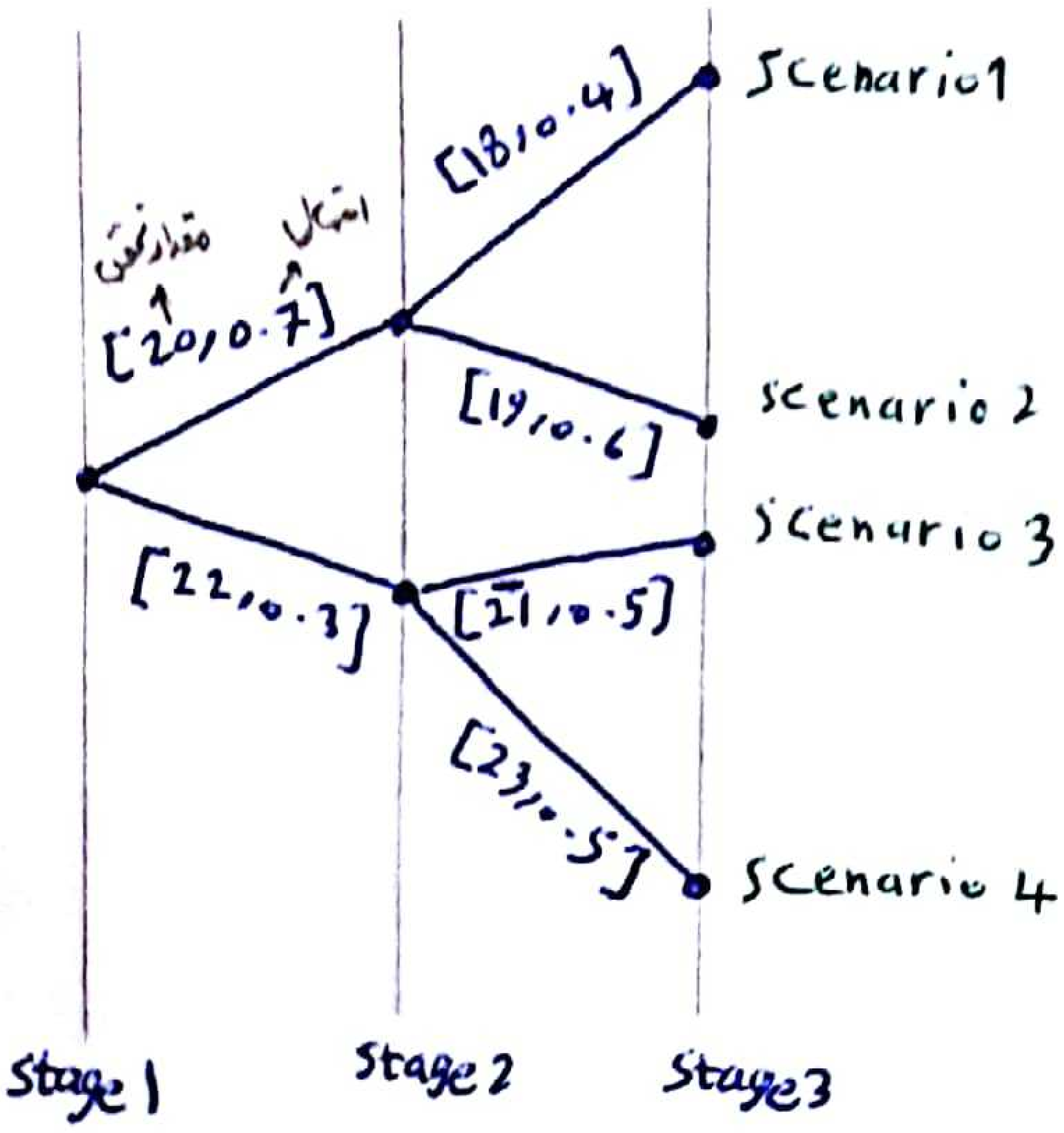
سرعت باد در یک بازه دو ساعته:

$$v(w) = [v_1(w), v_2(w)] , \quad w=1,2,3$$
$$v(1) = [5.5, 7.8] \ m/s , \ P=0.4$$
$$v(2) = [10, 13.7] \ m/s , \ P=0.3$$
$$v(3) = [1.2, 2.4] \ m/s , \ P=0.3$$

برای اینکه تقریب‌های خوبی در حالت گسسته انجام شود باید تعداد سناریوها زیاد باشد.
اما اگر تولید سناریو بیشتر از یک حد انجام شود، مسئله قابل حل نیست
و باید تعداد سناریوها را کاهش داد.

- تولید سناریو (Scenario Generation)

بطور مثال یک درخت سناریو (scenario-tree) سه مرحله‌ای برای قیمت بازار :



مثلاً احتمال وقوع سناریو ۱ : $0.7 \times 0.4 = 0.28$

مجموع احتمالات سناریوها ۱ است.

- اگر فرایند تصادفی Y دارای متغیرهای تصادفی $[y_t, t]$ را در نظر بگیریم.

✓ مدل (AR) Auto-Regressive با مرتبه p :

$$y_t = c + \sum_{j=1}^{p} \varphi_j \, y_{t-j} + \varepsilon_t$$

که در آن φ_p و ... و φ_1 پارامترهای مدل هستند، c ثابت مدل، ε_t خطای مدل.

✓ مدل میانگین متحرک (MA) Moving-Average با مرتبه q :

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \, \varepsilon_{t-j}$$

که در آن θ_q و ... و θ_1 پارامترهای مدل هستند، μ امید ریاضی y_t است که اغلب برابر صفر در نظر گرفته می‌شود.

✓ مدل $ARMA(p,q)$ برای فرایند تصادفی Y :

$$y_t = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j \, y_{t-j} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \, \varepsilon_{t-j}$$

- الگوریتم تولید سناریو با استفاده از مدل ARMA :

مرحله ۱: شاخص سناریو را برابر با صفر قرار می‌دهیم. $w=0$

مرحله ۲: شاخص سناریو را به روز رسانی کرده و شمارنده بازه زمانی را برابر با صفر قرار می‌دهیم. $w=w+1$, $t=0$

مرحله ۳: شمارنده بازه زمانی را به روز رسانی می‌کنیم. $t=t+1$

مرحله ۴: به طور رندوم مقدار $\varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$ را تولید می‌کنیم.

مرحله ۵: مقدار y_{tw} را حساب می‌کنیم.

مرحله ۶: اگر $t<N_T$ (تعداد کل بازه‌های زمانی) به مرحله ۳ می‌رویم. در غیر اینصورت به مرحله ۷ می‌رویم.

مرحله ۷: اگر $w<N_s$ (تعداد کل سناریوها) به مرحله ۲ می‌رویم. در غیر اینصورت فرایند تولید سناریو به پایان می‌رسد.

مثال . ARMA(1,1)

تولید دو سناریو برای سه بازه زمانی $w = 1,2$ $t = 1,2,3$

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

پارامترهای مدل $\varphi_1 = 0.9914$, $\theta_1 = 0.1131$

$y_0 = 21.3567$, $\varepsilon_0 = -0.0124$, $\sigma = 0.021$

ابتدا سه مقدار رندوم برای خطا تولید می‌کنیم: 0.025 ، -0.0241 ، 0.006

y_{tw} برای سناریو ۱ $(w=1)$:

$$y_{11} = \varphi_1 y_0 + \varepsilon_{11} - \theta_1 \varepsilon_0 = 0.9914 \times 21.3567 + 0.006 - 0.1131 \times (-0.0124) = 21.1804$$

$$y_{21} = \varphi_1 y_{11} + \varepsilon_{21} - \theta_1 \varepsilon_{11} = 0.9914 \times 21.1804 - 0.0241 - 0.1131 \times (0.006) = 20.9735$$

$$y_{31} = \varphi_1 y_{21} + \varepsilon_{31} - \theta_1 \varepsilon_{21} = 0.9914 \times 20.9735 + 0.025 - 0.1131 \times (0.0241) = 20.8209$$

y_{tw} برای سناریو ۲ $(w=2)$:

سه مقدار تصادفی برای خطا تولید می‌کنیم: 0.0069 ، -0.0008 ، 0.025

$$y_{12} = \varphi_1 y_0 + \varepsilon_{12} - \theta_1 \varepsilon_0 = 21.1994$$

$$y_{22} = \varphi_1 y_{12} + \varepsilon_{22} - \theta_1 \varepsilon_{12} = 21.0135$$

$$y_{32} = \varphi_1 y_{22} + \varepsilon_{32} - \theta_1 \varepsilon_{22} = 20.8398$$

- تولید سناریو برای مسئله در دسترس بودن واحدها (Unit Availability)

در دسترس بودن یک واحد معمولاً با پارامترهای زمان مانده تا خرابی (t_F) و زمان مانده تا تعمیرات (t_R) مشخص می‌شود

time to failure   time to repair

$$t_F = -MTTF \times \ln(u_1)$$

$$t_R = -MTTR \times \ln(u_2)$$

u_1، u_2 متغیرهای رندوم دارای توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱

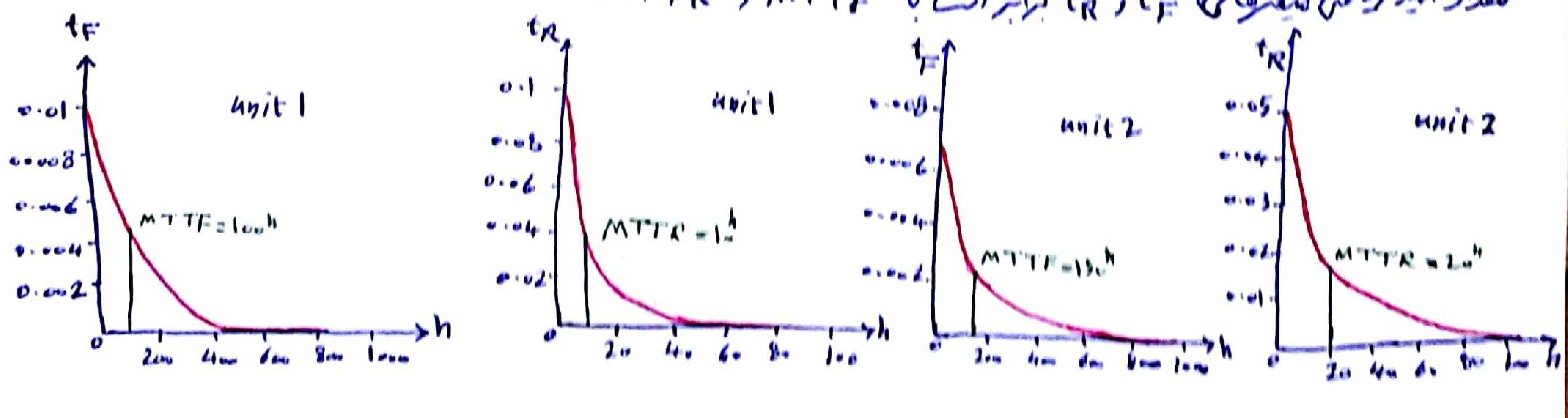
- مثال:

دو واحد تولیدکننده داریم:

Unit 1 : $MTTF = 100^h$, $MTTR = 10^h$

Unit 2 : $MTTF = 150^h$, $MTTR = 20^h$

مقدار امید ریاضی متغیرهای t_F و t_R برابر است با MTTF و MTTR



در دسترس بودن واحد g در بازه زمانی t با سناریو w را با a_{gtw} نشان می‌دهیم.

- الگوریتم تولید سناریو:

مرحله ۱: شاخص سناریو را برابر با صفر قرار می‌دهیم. $w=0$

مرحله ۲: شاخص سناریو را به روزرسانی کرده و شمارنده بازه زمانی را برابر با صفر قرار می‌دهیم. $t=0$ ، $w=w+1$

مرحله ۳: مقادیر u_1 و u_2 را به صورت رندوم تولید می‌کنیم. $u_1 \sim U(0,1)$ ، $u_2 \sim U(0,1)$

مرحله ۴: مقادیر t_F و t_R را بدست می‌آوریم.

مرحله ۵: از $\min(N_T, t+1)$ تا $\min(N_T, round(t+t_F))$ ، مقدار ۱ $a_{gtw}=1$ قرار می‌دهیم.

مرحله ۶: از $\min(N_T, round(t+t_F+1))$ تا $\min(N_T, round(t+t_F+t_R))$ ، مقدار $a_{gtw}=0$ قرار می‌دهیم.

مرحله ۷: شمارنده بازه زمانی را به روزرسانی می‌کنیم. $t=\min(round(t+t_F+t_R+1), N_T)$

مرحله ۸: اگر $t<N_T$ به مرحله ۳ برمی‌گردیم. درغیراینصورت به مرحله ۹ می‌رویم.

مرحله ۹: اگر $w<N_\Omega$ به مرحله ۲ برمی‌گردیم. درغیراینصورت تولید سناریو به پایان می‌رسد.

- مثال: برای یک افق برنامه‌ریزی 2000h (تعداد کل بازه‌های زمانی) برای یک واحد تولیدی داریم:

$$MTTF = 1000^h \quad , \quad MTTR = 50^h$$

✓ ابتدا برای بدست آوردن t_F و t_R ، دو متغیر رندوم یکنواخت u_1 و u_2 را بین ۰ و ۱ تولید می‌کنیم:

$$u_1 = 0.6324 \quad , u_2 = 0.0975$$

$$\rightarrow t_F = 458.3 \xrightarrow{round} 458\ h$$

$$t_R = 116.4 \xrightarrow{round} 116\ h$$

تعداد بازه‌ها باید یک عدد صحیح باشد.

در 458 ساعت ابتدایی، واحد در دسترس است و از ساعت 458 تا 574 = 458+116 واحد در دسترس نیست.

✓ چون هنوز به $N_T=2000h$ نرسیده‌ایم، مجدداً مقادیر u_1 و u_2 را تصادفی تولید می‌کنیم.

$$u_1 = 0.2785 \quad , \quad u_2 = 0.5469$$

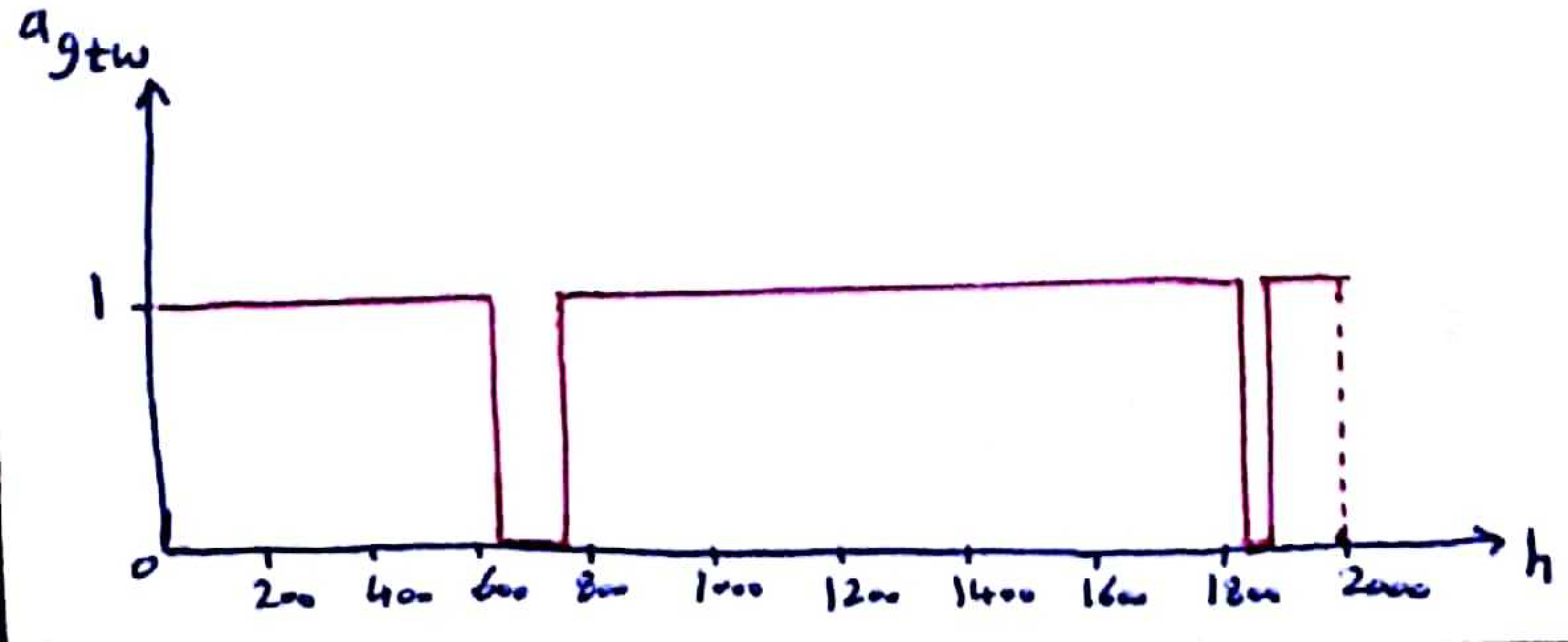
$$\rightarrow t_F = 1278^h \quad , \quad t_R = 30^h$$

از ساعت 574 تا 1852 = 1278 + 574 ، واحد در دسترس است و از ساعت 1852 تا 1882 = 1852+30 واحد در دسترس نیست.

✓ تولید مجدد u_1 و u_2:

$$u_1 = 0.8003 \quad , \quad u_2 = 0.1419$$

$$\rightarrow t_F = 223^h \quad , \quad t_R = 98^h$$



$$1882 + 223 > 2000$$

پس واحد از ساعت 1882 تا پایان افق برنامه‌ریزی، در دسترس است.

- کاهش سناریو

تابع توزیع احتمال Q برای مجموعه سناریو Ω تعریف می‌شود

برای کاهش سناریو باید یک زیرمجموعه Ω_s از Ω پیدا کنیم که دارای تابع توزیع احتمال Q' است. به طوری که فاصله این توابع احتمال (Probability Distance) کمترین مقدار ممکن باشد.

معمول‌ترین روش محاسبه فاصله بین توابع توزیع احتمال Q و Q' روش kantorovich distance است:

$$D_k(Q, Q') = \min \left\{ \sum_{\omega}\sum_{\omega'} v(\omega,\omega')\ \eta(\omega,\omega') \right\}$$

$$\omega \in \Omega\ ,\ \omega' \in \Omega_s$$

$$\sum_{\omega'} \eta(\omega,\omega') = \pi_\omega \quad \text{و} \quad \sum_{\omega} \eta(\omega,\omega') = \tau_{\omega'}$$

π_ω و $\tau_{\omega'}$ احتمال سناریوهای ω و ω' بر طبق توابع توزیع Q و Q' هستند.

$$D_k(Q, Q') = \sum_{\omega} \left[\pi_\omega \ \min v(\omega,\omega')\right]$$

اگر Ω_s با حذف برخی سناریوها از Ω بدست آید: backward reduction

اگر Ω_s با انتخاب برخی سناریوها از Ω بدست آید: forward selection

- معمولاً در بعضی مسائل از جمله بازار برق، روش دوم بهتر جواب می‌دهد.

در این روش ابتدا مجموعه Ω_s تهی است ($\Omega_s = \emptyset$) و در هر تکرار، از بین سناریوهای انتخاب نشده ($\Omega \setminus \Omega_s$)، سناریویی که کمترین فاصله را بین مجموعه اصلی و مجموعه کاهش یافته داشته باشد، انتخاب می‌شود و در مجموعه Ω_s قرار می‌گیرد.

الگوریتم زمانی پایان می‌یابد که به یک تعداد سناریو مشخص شده یا به یک فاصله مورد نظر برسیم.

- الگوریتم کاهش سناریو (fast forward selection algorithm)

- مرحله ۰: محاسبه تابع $v(\omega,\omega')$ برای سناریوهای ω و ω' از مجموعه سناریوهای Ω
- مرحله ۱: محاسبه d_ω:

$$d_\omega = \sum_{\substack{\omega'=1\\ \omega'\neq\omega}}^{N_\Omega} \left[\pi_{\omega'}\ v(\omega,\omega')\right] \ , \ \forall \omega\in\Omega$$

$$\omega_1 = \arg\min d_\omega$$

$$\Omega_J^{[1]} = \{1, \dots, N_\Omega\} \setminus \omega_1$$

$\Omega_J^{[i]}$: مجموعه سناریوهایی که در i مرحله اول انتخاب نشده‌اند.

$\Omega_s^{[i]}$: مجموعه سناریوهای انتخاب شده در i مرحله اول.

مرحله i:

$$v^{[i]}(\omega,\omega') = \min\left\{ v^{[i-1]}(\omega,\omega')\ ,\ v^{[i-1]}(\omega,\omega_{i-1}) \right\} \ , \forall\, \omega,\omega' \in \Omega_J^{[i-1]}$$

$$d_\omega^{[i]} = \sum_{\omega'\in \Omega_J^{[i-1]} \setminus \omega} \left[\pi_{\omega'}\ v^{[i]}(\omega',\omega)\right] \ , \ \forall\, \omega\in\Omega_J^{[i-1]}$$

$$\omega_i = \arg\min d_\omega^{(i)}$$

$$\Omega_J^{[i]} = \Omega_J^{[i-1]} \setminus \omega_i$$

• مرحله $N_{\Omega_S^*}+1$:

$\Omega_J^* = \Omega_J^{[N_{\Omega_S^*}]}$ مجموعه‌ی سناریوهای انتخاب نشده

$\Omega_S^* = \Omega \setminus \Omega_J^*$ مجموعه‌ی سناریوهای انتخاب شده

احتمال سناریوهای انتخاب شده :

$$\pi_w^* = \pi_w + \sum_{w' \in J(w)} \pi_{w'} \quad , \quad \forall w \in \Omega_S^*$$

$$J(w) = \{ w' \in \Omega_J^* \mid w = j(w') \} \text{ و } j(w') = \arg\min_{w''} v(w'', w')$$

- دو روش برای محاسبه تابع $v(\cdot)$ در مرحله ۰

۱- براساس نرم (Norm) اختلاف بین متغیرهای تصادفی

فرایند تصادفی λ : $\lambda = \{ \lambda(w) , w = 1,2,\dots,N_\Omega \}$

$$v(w,w') = \| \lambda(w) - \lambda(w') \|$$

۲- براساس تابع هدف مسئله :

$$\text{Minimize} \quad z = c^T x + \sum_w [\pi(w)\, q^T(w)\, y(w)]$$

اگر به جای λ مقدار امید ریاضی آن را قرار دهیم ($\bar{\lambda} = E(\lambda)$):

$$\text{Minimize} \quad z_E = c^T x + q^T(\bar{\lambda})\, y(\bar{\lambda})$$

اگر مقدار بهینه مسئله در stage 1 برابر $\bar{x}$ باشد، و فرایند تصادفی λ با مقدار آن در سناریو w یعنی $\lambda(w)$ جایگزین شود :

$$\text{Minimize} \quad z_w = c^T \bar{x} + q^T(w)\, y(w)$$

بنابراین تابع $v(\cdot)$ به شکل زیر تعریف می‌شود :

$$v(w,w') = | z_w - z_{w'} |$$

که z_w مقدار بهینه تابع هدف است .

- در روش دوم ، برخلاف روش اول برای بدست آوردن مقدار بهینه z_w ، باید مسئله برنامه ریزی تصادفی (SP) حل شود .

- مثال روش I :

توان تولیدی P از یک مزرعه توربین بادی 100^{MW} در یک بازه زمانی مشخص، می‌تواند توسط چهار سناریوی P_w نشان داده شود :

سناریو	1	2	3	4
P_w (MW)	5	40	60	100
احتمال $\pi(w)$	0.25	0.2	0.2	0.35

$N_\Omega = 4$

می‌خواهیم تعداد سناریوها را به $N_{\Omega_S^*} = 2$ کاهش دهیم .

• مرحله ۰ :

$$v(w,w') = \| P_w - P_{w'} \| \text{ و } \forall w, w' \in \Omega$$

$$\Omega = \{1,2,3,4\}$$

$$v = \begin{bmatrix} 0 & 35 & 55 & 95 \\ 35 & 0 & 20 & 60 \\ 55 & 20 & 0 & 40 \\ 95 & 60 & 40 & 0 \end{bmatrix} \text{MW}$$

• مرحله ۱: برای انتخاب سناریو از مجموعه Ω، سناریویی که فاصله kantorovich بین Ω و Ω_s را مینیمم کند، انتخاب می‌شود.

$$d_1 = \pi_2\, v(1,2) + \pi_3\, v(1,3) + \pi_4\, v(1,4) = 51.25 \text{ MW}$$

$$d_2 = \pi_1\, v(2,1) + \pi_3\, v(2,3) + \pi_4\, v(2,4) = 33.75 \text{ MW}$$

$$d_3 = \pi_1\, v(3,1) + \pi_2\, v(3,2) + \pi_4\, v(3,4) = 31.75 \text{ MW}$$

$$d_4 = \pi_1\, v(4,1) + \pi_2\, v(4,2) + \pi_3\, v(4,3) = 43.75 \text{ MW}$$

$$\rightarrow \Omega_s^{[1]} = \{3\} \quad , \quad \Omega_J^{[1]} = \{1,2,4\}$$

• مرحله ۲: به روز رسانی تابع $v(\cdot)$

$$v^{[2]}(1,2) = \min\{v(1,2), v(1,3)\} = 35 \text{ MW}$$

$$v^{[2]}(1,4) = \min\{v(1,4), v(1,3)\} = 55 \text{ MW}$$

$$v^{[2]}(2,1) = \min\{v(2,1), v(2,3)\} = 20 \text{ MW}$$

$$v^{[2]}(2,4) = \min\{v(2,4), v(2,3)\} = 20 \text{ MW}$$

$$v^{[2]}(4,1) = \min\{v(4,1), v(4,3)\} = 40 \text{ MW}$$

$$v^{[2]}(4,2) = \min\{v(4,2), v(4,3)\} = 40 \text{ MW}$$

$$\rightarrow v^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 35 & 55 & 55 \\ 20 & 0 & 20 & 20 \\ 55 & 20 & 0 & 40 \\ 40 & 40 & 40 & 0 \end{bmatrix} \text{ MW}$$

سناریو ها را از مجموعه $\Omega_J^{[1]}$ انتخاب می‌کنیم.

$$d_1^{[2]} = \pi_2\, v^{[2]}(2,1) + \pi_4\, v^{[2]}(4,1) = 18 \text{ MW}$$

$$d_2^{[2]} = \pi_1\, v^{[2]}(1,2) + \pi_4\, v^{[2]}(4,2) = 22.75 \text{ MW}$$

$$d_4^{[2]} = \pi_1\, v^{[2]}(1,4) + \pi_2\, v^{[2]}(2,4) = 17.75 \text{ MW}$$

$$\rightarrow \Omega_s^{[2]} = \Omega_s^* = \{3,4\} \quad , \quad \Omega_J^{[2]} = \Omega_J^* = \{1,2\}$$

• مرحله ۳:

$$v(\omega',1): \quad v(3,1) = 55 \quad , \quad v(4,1) = 95 \quad \rightarrow \quad \arg\min v(\omega',1) = 3$$

$$v(\omega'',2): \quad v(3,2) = 20 \quad , \quad v(4,2) = 60 \quad \rightarrow \quad \arg\min v(\omega'',2) = 3$$

$$\rightarrow \pi_3^* = \pi_3 + \pi_1 + \pi_2 = 0.65$$

$$\pi_4^* = \pi_4 = 0.35$$

- مثال روش ۲ :

در این روش باید مسئله برنامه ریزی تصادفی را حل کنیم.

بهره بردار مزرعه توربین بادی ، توان تولید شده را به بازار برق می فروشد. اما از آنجایی که توان بادی تولید شده توسط توربین های بادی دارای عدم قطعیت است ، تولیدکننده توان P^D را در بازار روز بعد (day-ahead Market) ثبت می کند.

سپس مقدار تولید احتمالی اضافی (Δ^+) یا کسری احتمالی تولید (Δ^-) از طریق فرایند متعادل سازی لحظه ای (real time) تنظیم می شود.

تصمیم گیری درباره مقدار فروش انرژی به بازار روز بعد با بهینه کردن تابع زیر انجام می شود :

$$\text{Maximize} \quad z = \sum_{\omega=1}^{N_\Omega} \pi_\omega \left(\lambda^D P_\omega - \lambda^D (1-r^+)\, \Delta^+_\omega - \lambda^D (r^- - 1)\, \Delta^-_\omega \right)$$

$$0 \leqslant P^D \leqslant P^{max}$$

$$\Delta^+_\omega - \Delta^-_\omega = P_\omega - P^D$$

$$0 \leqslant \Delta^+_\omega \leqslant P_\omega$$

$$0 \leqslant \Delta^-_\omega \leqslant P^{max}$$

$P^{max} = 100$ MW ظرفیت تولید مزرعه بادی

λ^D : قیمت بازار روز بعد

r^+ , r^- : نسبت قیمت عدم تعادل به λ^D

$\lambda_D = 20 \ \$/\text{MWh}$, $r^+ = 0.95$, $r^- = 1.4$

حال که مسئله برنامه ریزی تصادفی مدل شد، فرایند کاهش سناریو را به شکل زیر انجام می دهیم :

مرحله ۰ :

$$v(\omega, \omega_1) = | z_\omega - z_{\omega_1} |$$

$$\text{Maximize} \quad z_E = (1125 - \bar{\Delta}^+ - 8\bar{\Delta}^-)$$

s.t.

$$0 \leqslant \bar{P}^D \leqslant 100$$

$$\bar{\Delta}^+ - \bar{\Delta}^- = 56.25 - \bar{P}^D$$

$$0 \leqslant \bar{\Delta}^+ \leqslant 56.25$$

$$0 \leqslant \bar{\Delta}^- \leqslant 100$$

$$E(P) = 5 \times 0.25 + 40 \times 0.2 + 60 \times 0.2 + 100 \times 0.35 = 56.25 \text{ MW}$$

$$\rightarrow \bar{P}^D = 56.25 \text{ MW} \ , \ \bar{\Delta}^+ = \bar{\Delta}^- = 0 \ , \ z_E = 1125 \ \$$$

بدست آوردن تابع هدف z_ω برای سناریوها :

$$\text{Maximize} \quad z_\omega = (20 P_\omega - \Delta^+_\omega - 8\Delta^-_\omega)$$

s.t.

$$\Delta^+_\omega - \Delta^-_\omega = P_\omega - 56.25$$

$$0 \leqslant \Delta^+_\omega \leqslant P_\omega$$

$$0 \leqslant \Delta^-_\omega \leqslant 100$$

$$\rightarrow \Delta_w^+ (MW) = \begin{cases} 0 & , w=1,2 \\ P_w - 56.25 & , w=3,4 \end{cases} \quad , \quad \Delta_w^- (MW) = \begin{cases} 56.25 - P_w & , w=1,2 \\ 0 & , w=3,4 \end{cases}$$

$$\rightarrow z_w (\$) = \begin{cases} 28 P_w - 450 & , w=1,2 \\ 19 P_w + 56.25 & , w=3,4 \end{cases}$$

سناریو	1	2	3	4
$z_w(\$)$	-310	670	1196.25	1956.25
π_w	0.25	0.2	0.2	0.35

$$v = \begin{bmatrix} 0 & 980 & 1506.25 & 2266.25 \\ 980 & 0 & 526.25 & 1286.25 \\ 1506.25 & 526.25 & 0 & 760 \\ 2266.25 & 1286.25 & 760 & 0 \end{bmatrix} \$$$

مرحله ۱:

$$d_1 = \pi_2 v(1,2) + \pi_3 v(1,3) + \pi_4 v(1,4) = 1290.4375$$
$$d_2 = \pi_1 v(2,1) + \pi_3 v(2,3) + \pi_4 v(2,4) = 800.4375$$
$$d_3 = \pi_1 v(3,1) + \pi_2 v(3,2) + \pi_4 v(3,4) = 747.8125$$
$$d_4 = \pi_1 v(4,1) + \pi_2 v(4,2) + \pi_3 v(4,3) = 975.8125$$

$$\rightarrow \Omega_S^{[1]} = \{3\}$$
$$\Omega_J^{[1]} = \{1,2,4\}$$

مرحله ۲:

$$v^{[2]}(1,2) = \min\{v(1,2), v(1,3)\} = 980$$
$$v^{[2]}(1,4) = \min\{v(1,4), v(1,3)\} = 1506.25$$
$$v^{[2]}(2,1) = 526.25 \quad , \quad v^{[2]}(2,4) = 526.25$$
$$v^{[2]}(4,1) = 760 \quad , \quad v^{[2]}(4,2) = 760$$

$$\rightarrow v^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 980 & 1506.25 & 1506.25 \\ 526.25 & 0 & 526.25 & 526.25 \\ 1506.25 & 526.25 & 0 & 760 \\ 760 & 760 & 760 & 0 \end{bmatrix} \$$$

$$d_1^{[2]} = \pi_2 v^{[2]}(2,1) + \pi_4 v^{[2]}(4,1) = 371.25$$
$$d_2^{[2]} = 511 \quad , \quad d_4^{[2]} = 481.8125$$

$$\rightarrow \Omega_S^{[2]} = \Omega_S^* = \{1,3\} \quad , \quad \Omega_J^{[2]} = \Omega_J^* = \{2,4\}$$

مرحله ۳:

$$v(w', 2): \ v(1,2) = 980 \quad , \quad v(3,2) = 526.25 \checkmark$$
$$v(w', 4): \ v(1,4) = 2266.25 \quad , \quad v(3,4) = 760 \checkmark$$

$$\rightarrow \pi_1^* = \pi_1 = 0.25$$
$$\pi_3^* = \pi_3 + \pi_2 + \pi_4 = 0.75$$

- مدیریت ریسک

در مسائل تصمیم گیری توسط روش برنامه ریزی تصادفی، تابع هدف به طور مثال ماکزیمم کردن سود یا مینیمم کردن هزینه بود.

چون متغیرهای تصادفی دارای یک تابع توزیع هستند، در مسائل بهینه سازی باید یک پارامتر مشخصه تابع توزیع (مثلاً امید ریاضی متغیر) را بهینه کرد.

مثلاً ماکزیمم کردن امید ریاضی سود

وقتی امید ریاضی متغیر تصادفی را بهینه می کنیم، اشکالی که پیش می آید این است که سایر مشخصه های تابع توزیع لحاظ نمی شود

بطور مثال ممکن است مقدار امید ریاضی سود قابل قبول باشد اما سود منفی وجود داشته باشد.

معمول ترین راه مدیریت ریسک اضافه کردن یک عبارت برای اندازه گیری ریسک در فرمول بندی مسئله است.

معیار اندازه گیری ریسک می تواند به طور مثال واریانس تابع سود یا احتمال کمتر بودن امید ریاضی از یک مقدار مشخص باشد.

- معیارهای اندازه گیری ریسک:

۱- واریانس

۲- احتمال کمتر بودن تابع هدف از یک مقدار مشخص — Shortfall Probability

۳- امید ریاضی کمتر بودن تابع هدف از یک مقدار مشخص — Expected shortage

۴- ارزش در معرض ریسک (VaR) — Value-at-Risk

۵- ارزش در معرض ریسک مشروط (CVaR) — Conditional Value-at-Risk

- تقسیم بندی مسائل از نظر ریسک:

۱- تصمیم گیری بدون در نظر گرفتن ریسک — Risk-Neutral Decision Making

۲- تصمیم گیری ریسک گریز — Risk-Averse " "

Risk-Neutral:

$$\text{Maximize} \quad E_w\{f(x,w)\}, \quad x \in X, \quad w \in \Omega$$

مثال: خرید برق از بازار آینده و فروش برق به مصرف کننده به منظور ماکزیمم کردن سود توسط خرده فروش بازار برق
retailer — Profit — future market

λ^{P}_{tw} : قیمت برق Pool در بازه t برای سناریو w

λ^{F}_{f} : قیمت برق خریداری شده از بازار آینده از طریق سه قرارداد مختلف $f=1,2,3$

X^{max}_{f} : ماکزیمم مقدار توان قابل خریداری

x_f : توان خریداری شده از طریق قرارداد f

P^{c}_{t} : توان مصرفی مشتری ها در بازه t

$\lambda^{c}=35\ \$/MWh$: قیمت فروش انرژی به مصرف کننده

سه بازه یک ساعته

مقدار مصرف برای سه بازه زمانی: 150, 225, 175 MW

اطلاعات قراردادها:

قرارداد	قیمت ($/MWh)	ماکزیمم توان (MW)
1	34	50
2	35	30
3	36	25

قیمت Pool برای ۱۰ سناریو با احتمال یکسان:

سناریو	بازه زمانی 1	2	3	سناریو	بازه زمانی 1	2	3
1	28.5	36.3	31.4	6	29.2	34.8	31.2
2	27.3	37.5	29.6	7	34.1	36.9	35.4
3	29.4	35.7	31.3	8	33.4	35.4	34.9
4	33.9	35.4	35.1	9	28.4	36.3	32.9
5	34.5	38.9	37.5	10	27.6	38.9	32.1

ماکزیمم کردن سود بدون در نظر گرفتن ریسک:

درآمد فروش انرژی - هزینه خرید انرژی

$$\text{Maximize} \quad \underbrace{\sum_{t=1}^{3} \lambda^{c} P_t^{c}}_{\text{ثابت}} - \underbrace{\sum_{f=1}^{3}\sum_{t=1}^{3} \lambda_f^{F} x_f}_{\text{ثابت}} - \sum_{\omega=1}^{10} \pi_\omega \sum_{t=1}^{3} \lambda_{t\omega}^{P}\, y_{t\omega}$$

s.t.

$$0 \leqslant x_f \leqslant X_f^{max} \quad , \quad f = 1,2,3$$

$$\sum_{f=1}^{3} x_f + y_{t\omega} = P_t^{c}$$

$$y_{t\omega} \geqslant 0$$

$y_{t\omega}$: توان خریداری شده از Pool در بازه t با سناریو ω

Optimal solution: $x_1^* = 0 \quad , x_2^* = 0 \quad , x_3^* = 0$

یعنی تمام انرژی مورد نیاز از Pool خریداری می‌شود.
زیرا میانگین قیمت Pool برابر $33.46\ \$/_{MWh}$ است که از قیمت هر سه قرارداد پایین‌تر است.

$$E(\text{سود}) = 618.75\ \$$$

سود برای هر سناریو:

سناریو	سود ($)	سناریو	سود ($)
1	1312.5	6	1580
2	1537.5	7	-362.5
3	1330	8	167.5
4	57.5	9	1065
5	-1240	10	740

چون ریسک را در نظر نگرفتیم و هدف ماکزیمم کردن سود بود، در بعضی سناریوها سودهای منفی و پایینی ایجاد شد.

احتمال وجود سود منفی: 0.2

Risk-Averse:

برای اندازه‌گیری ریسک یک تابع r_w اضافه می‌کنیم.

$$\text{Maximize} \quad E_w\{f(x,w)\} - \beta\, r_w\{f(x,w)\}$$

ضریب $\beta \geq 0$ مصالحه بین سود و ریسک را نشان می‌دهد.

با افزایش β، اهمیت امید ریاضی سود نسبت به ریسک کمتر می‌شود.

- همچنین می‌توان ریسک را به شکل یک قید جداگانه در نظر گرفت:

$$\text{Maximize} \quad E_w\{f(x,w)\}$$

$$\text{s.t.} \quad r_w\{f(x,w)\} \leq \delta$$

ریسک ماکزیمم

نقطهٔ بهینه جایی است که نتوان یک مجموعه امید ریاضی سود و ریسک دیگر یافت که همزمان مقدار امید ریاضی سود آن بزرگتر و ریسک آن کمتر باشد.

مجموعه نقاط بهینه برای مقادیر مختلف β، منحنی بهینه را تشکیل می‌دهند.