



# اصول و سیستم های رادار (بخش ششم)

نیم سال دوم ۹۸-۹۹

آشکارسازی سیگنال در حضور نویز

# آشکارسازی سیگنال در حضور نویز

- توابع چگالی احتمال
- احتمال هشدار اشتباه
- احتمال آشکارسازی
- تجمیع پالس ها

- نویز یک پدیده تصادفی بوده و در نتیجه آشکارسازی هدف در حضور نویز نیز یک پدیده تصادفی است و باید به صورت احتمالی بیان شود.
- تابع چگالی احتمال (Probability density function) یک متغیر تصادفی پیوسته (مانند نویز) تابعی است که احتمال اینکه این متغیر تصادفی مقدار مشخصی را داشته باشد، تعیین می کند.
- ویژگی های تابع چگالی احتمال

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \text{ for all } x \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \text{area under the entire graph of } f(x)=1 \end{cases}$$

□ احتمال اینکه متغیر تصادفی  $X$  با تابع چگالی احتمال  $p(X)$  بین دو

مقدار  $X_1$  و  $X_2$  باشد

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

□ میانگین متغیر تصادفی  $X$

$$\langle x \rangle_{av} = m = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

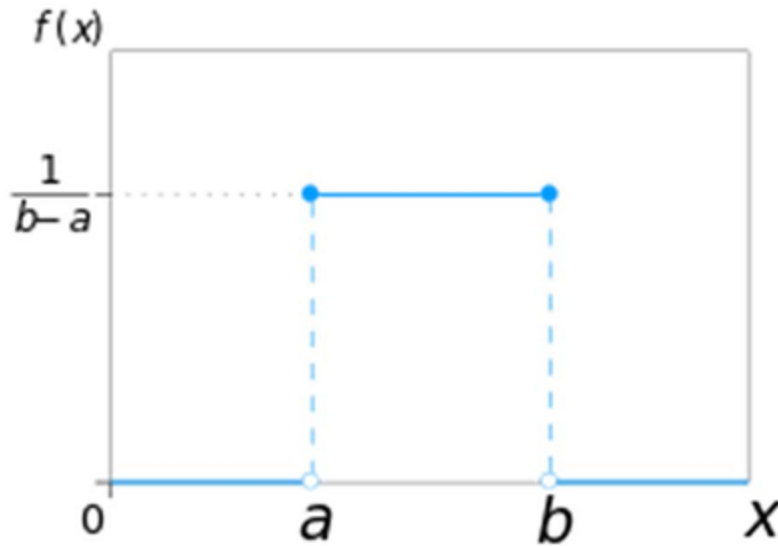
□ واریانس متغیر تصادفی  $X$

$$\sigma^2 = \left\langle (x - m_1)^2 \right\rangle_{av} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^2 f(x) dx = \langle x^2 \rangle_{av} - \langle x \rangle_{av}^2 = m_2 - m_1^2$$

□ جذر واریانس را انحراف معیار گویند.

□ تابع چگالی احتمال یکنواخت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{for } a < x < b \\ 0 & \text{Others} \end{cases}$$

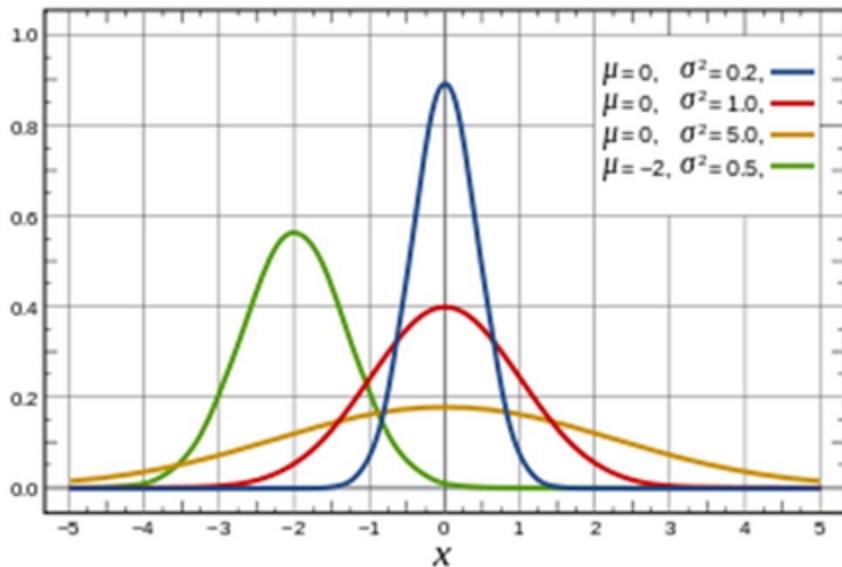


□ مقدار متوسط متغیر تصادفی  $X$  با توزیع یکنواخت

$$\text{mean} = \frac{1}{2}(a + b)$$

□ مقدار واریانس متغیر تصادفی  $X$  با توزیع یکنواخت

$$\text{variance} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

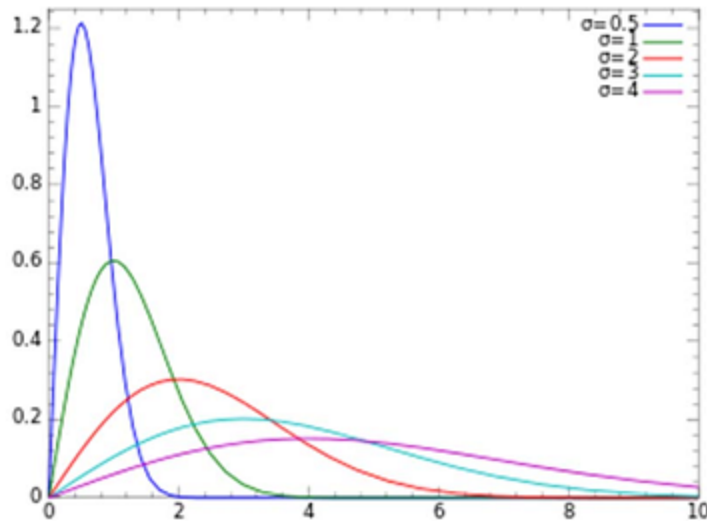


□ تابع چگالی احتمال گوسی یا نرمال

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Annotations:  $(x-\mu)$  is circled in blue with an arrow pointing to the word "mean".  $\sigma^2$  is circled in blue with an arrow pointing to the word "variance".

□ تابع چگالی احتمال گوسی در تئوری آشکارسازی مهم است زیرا نویز حرارتی گیرنده را توصیف می کند.



□ تابع چگالی احتمال رایلی

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad x \geq 0$$

□ این تابع نیز در رادار از اهمیت زیادی برخوردار است. زیرا **پوش نویز خروجی از یک فیلتر باریک باند** (مانند فیلتر IF) دارای تابع چگالی احتمال رایلی است وقتی ولتاژ نویز ورودی دارای توزیع گوسی باشد. همچنین رفتار آماری **سطح مقطع راداری** در برخی از اهداف و همچنین **برخی از انواع کلاتر** توسط این تابع مدل می شود.

□ مقدار متوسط متغیر تصادفی  $X$  با توزیع رایلی:  $\text{mean} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

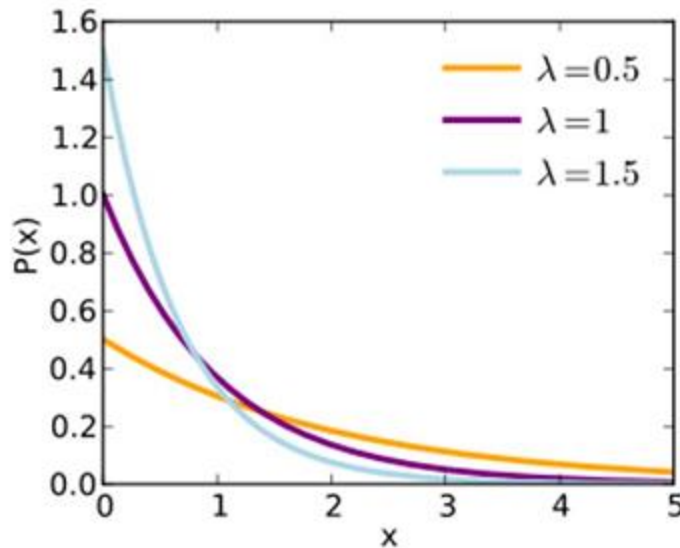
□ واریانس متغیر تصادفی با توزیع رایلی:  $\text{variance} = \frac{4 - \pi}{2} \sigma^2$

□ فرض کنید که  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی با توزیع گوسی، میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2$  باشند

$$\begin{array}{l}
 p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x)^2}{2\sigma^2}} \\
 p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y)^2}{2\sigma^2}}
 \end{array}
 \quad
 R = \sqrt{X^2 + Y^2}
 \quad
 \longrightarrow
 \quad
 p(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad r \geq 0$$



# توابع چگالی احتمال



□ تابع چگالی احتمال نمایی

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

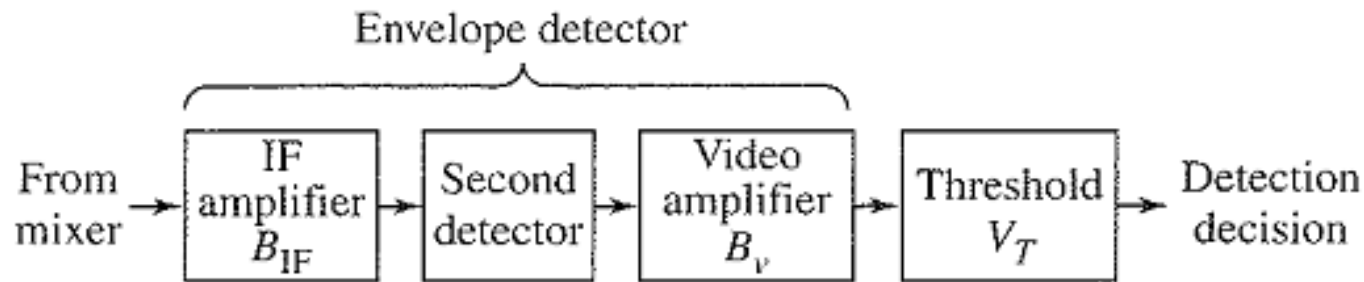
□ مقدار متوسط متغیر تصادفی  $x$  با توزیع نمایی:

$$\text{mean} = \lambda^{-1}$$

□ واریانس متغیر تصادفی با توزیع نمایی:

$$\text{variance} = \lambda^{-2}$$

## احتمال هشدار اشتباه (false alarm)

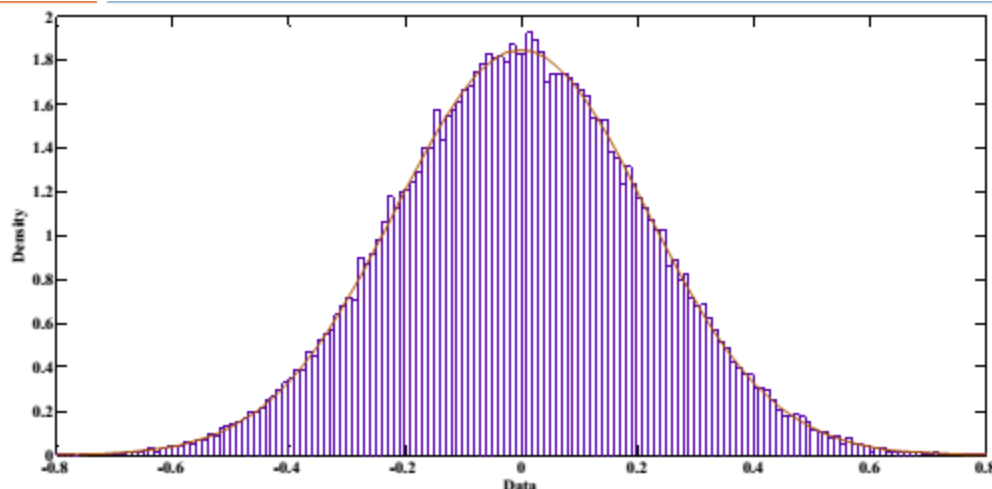


ولتاژ نویز

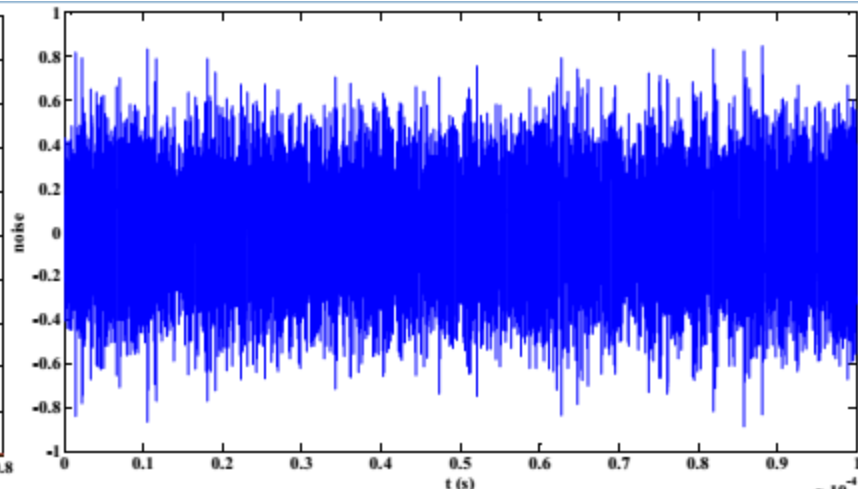
$$p(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\psi_0}} e^{-\frac{v^2}{2\psi_0}}$$

واریانس نویز  
(توان نویز)

□ تابع چگالی احتمال نویز خروجی از فیلتر IF  
□ گوسی با میانگین صفر

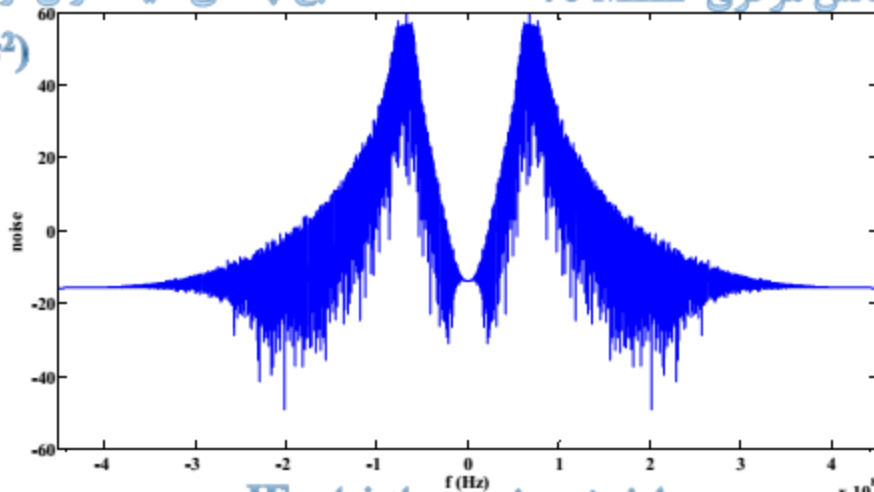


تابع چگالی طیف توان نویز خروجی فیلتر IF (گوسی)



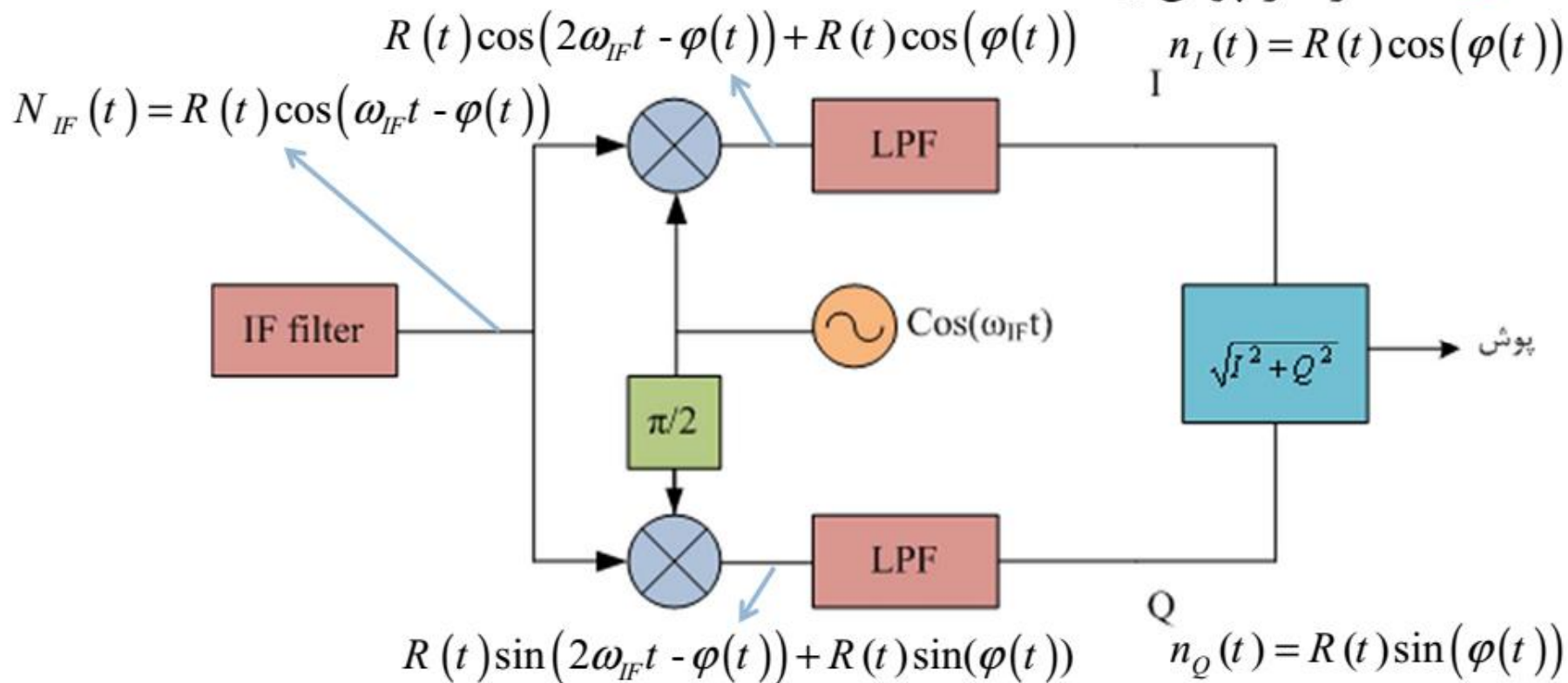
نویز خروجی از فیلتر IF با فرکانس مرکزی 70 MHz

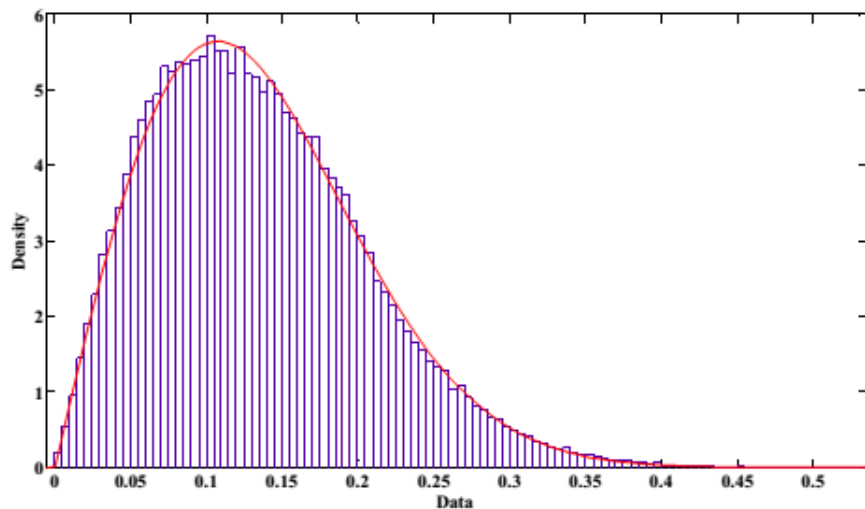
$N(0, \sigma^2)$



طیف نویز خروجی از فیلتر IF

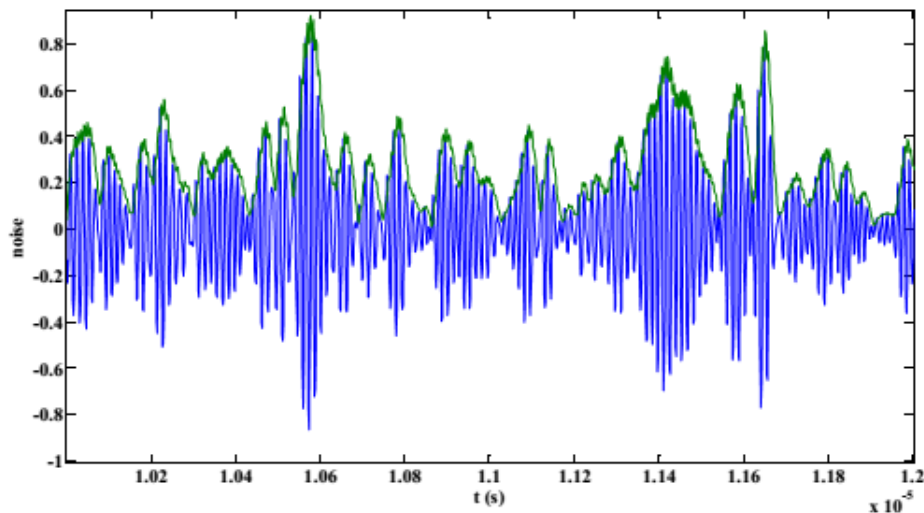
□ آشکارساز پوش I/Q





تابع چگالی طیف توان پوش نویز خروجی فیلتر IF (رایلی)

$$p(R) = \frac{R}{\psi_0} e^{-\frac{R^2}{2\psi_0}}$$

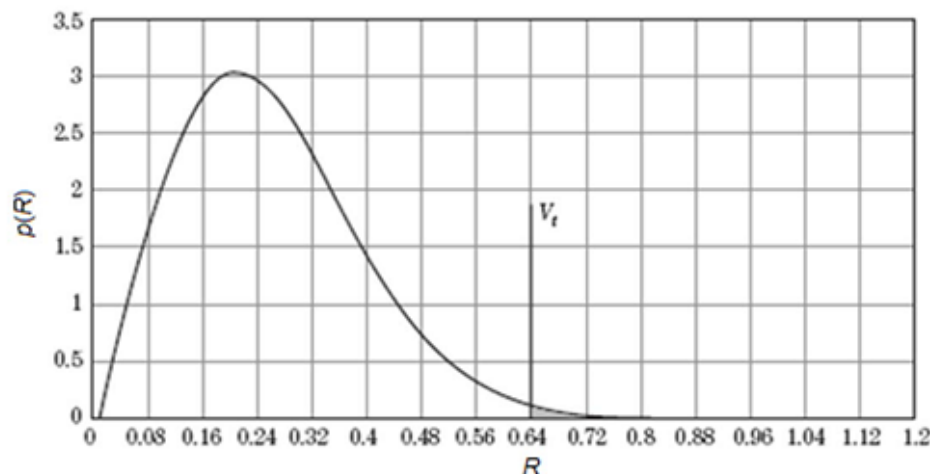


پوش نویز خروجی از فیلتر IF

$$R(t) = \sqrt{n_I^2 + n_Q^2}$$

□ احتمال اینکه پوش نویز از ولتاژ آستانه عبور کند

□ احتمال هشدار اشتباه



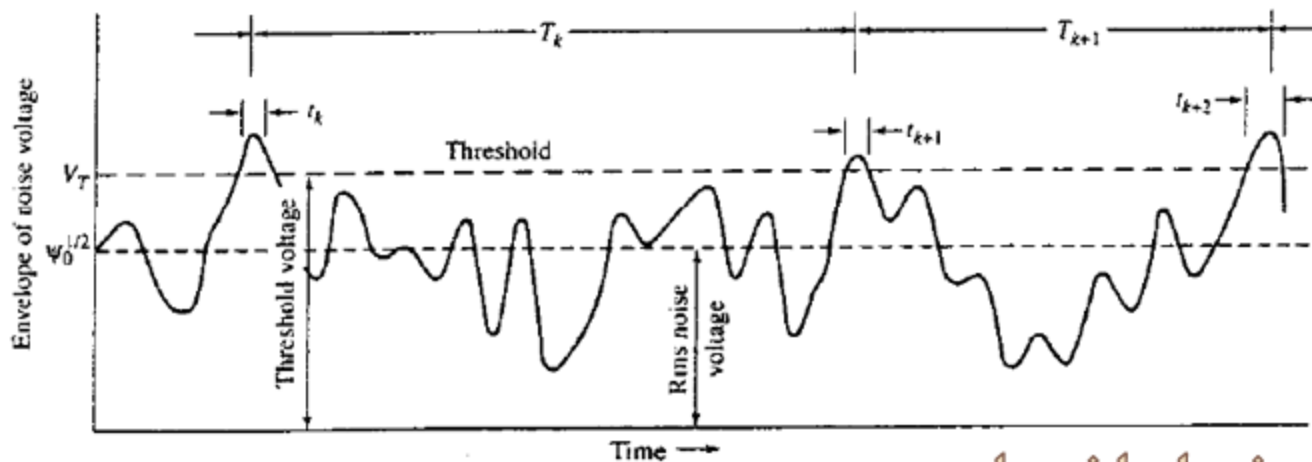
$$P(V_T < R < \infty) = \int_{V_T}^{\infty} \frac{R}{\psi_0} e^{-\frac{R^2}{2\psi_0}} dR$$

$$= e^{-\frac{V_T^2}{2\psi_0}} = P_{fa}$$

□ احتمال هشدار اشتباه به تنهایی نشان نمی دهد که آیا رادار به علت هشدارهای اضافی دچار اشکال می شود یا خیر.

□ فاصله بین هشدارهای اشتباه معیار بهتری برای تعیین اثر نویز بر عملکرد رادار است.

□ پوش نویز خروجی گیرنده و فاصله بین هشدارهای اشتباه



□ زمان هشدار اشتباه

□ میانگین زمان بین گذرها از سطح آستانه، هنگامیکه فقط نویز وجود دارد

$$T_{fa} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N T_k$$

□ رابطه احتمال هشدار اشتباه بر حسب زمان هشدار اشتباه

$$P_{fa} = \frac{\text{Time the envelope is actually above the threshold}}{\text{Total time}}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^N t_k}{\sum_{k=1}^N T_k} = \frac{\langle t_k \rangle_{av}}{\langle T_k \rangle_{av}} = \frac{1}{T_{fa} B}$$

□ رابطه زمان هشدار اشتباه

$$T_{fa} = \frac{1}{B} e^{\frac{V_T^2}{2\psi_0}}$$

□ به علت رابطه نمایی بین زمان هشدار اشتباه و سطح آستانه، زمان هشدار اشتباه به تغییرات کوچک در سطح آستانه بسیار حساس است.

□ به طور مثال برای پهنای باند 1 MHz و  $V_T^2 / 2\psi_0 = 13.2$  dB زمان هشدار اشتباه ۲۰ دقیقه خواهد بود. 0.5 dB کاهش سطح آستانه باعث کاهش زمان هشدار اشتباه به ۲ دقیقه می شود.



□ اگر یک سیگنال سینوسی با دامنه  $A$  به همراه نویز با واریانس  $\psi_0$  در ورودی آشکارساز باشند

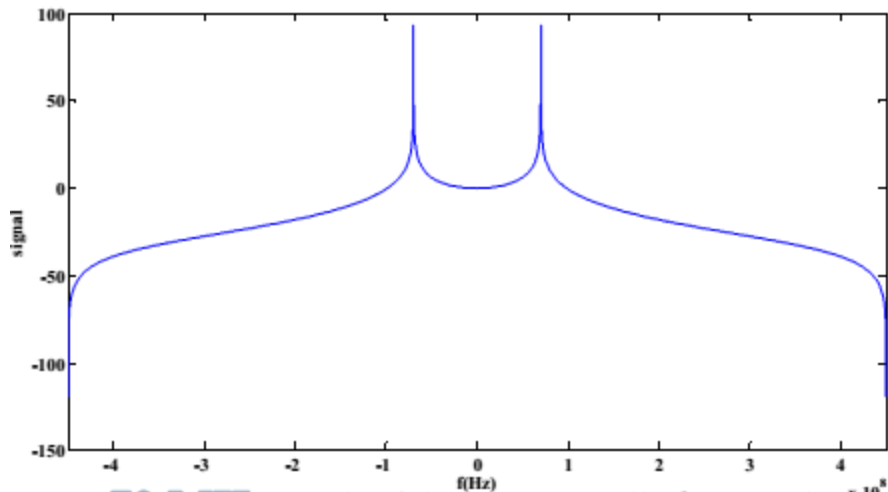
□ تابع چگالی احتمال پوش خروجی

■ تابع چگالی احتمال رایس

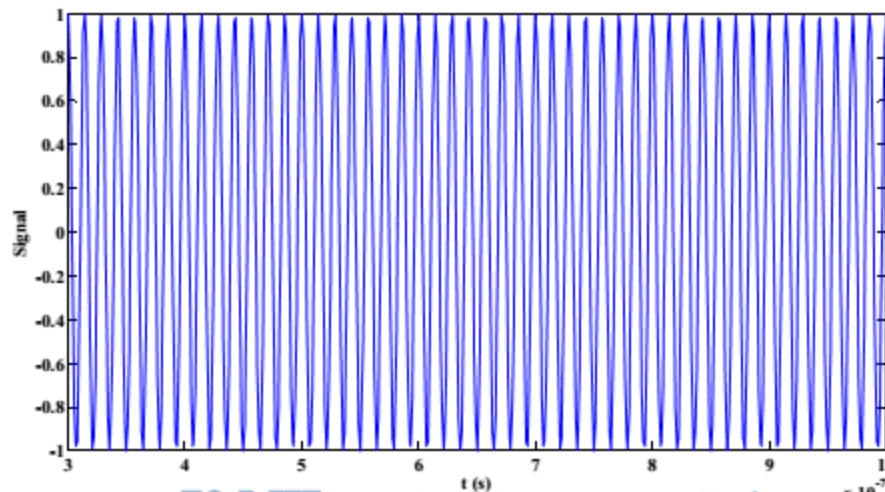
$$p_s(R) = \frac{R}{\psi_0} e^{-\frac{R^2 + A^2}{2\psi_0}} \left( \frac{RA}{\psi_0} \right)$$

تابع بسل بهبود یافته مرتبه صفر

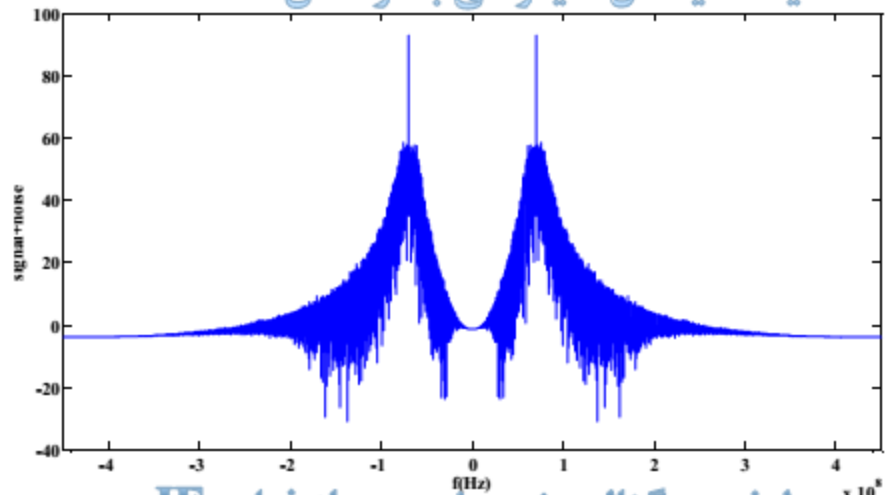
□ اگر  $A=0$  ← تابع فوق به تابع چگالی احتمال رایلی میل می کند.



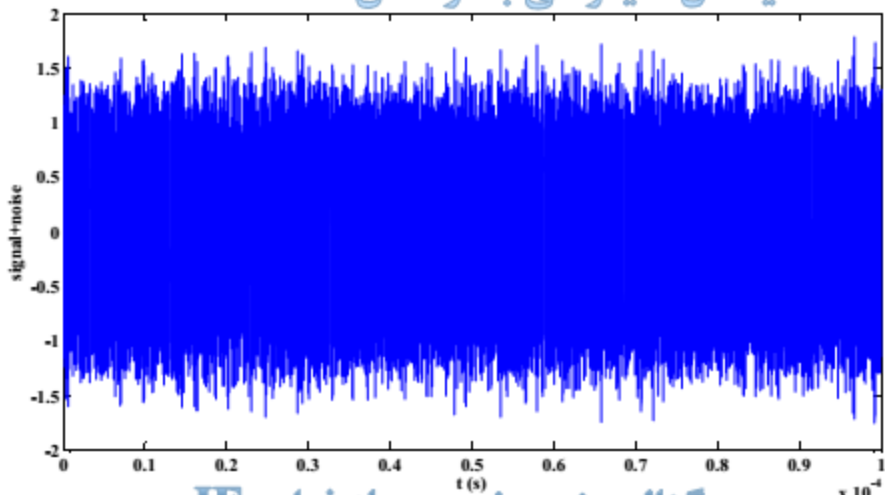
طیف سیگنال سینوسی با فرکانس 70 MHz



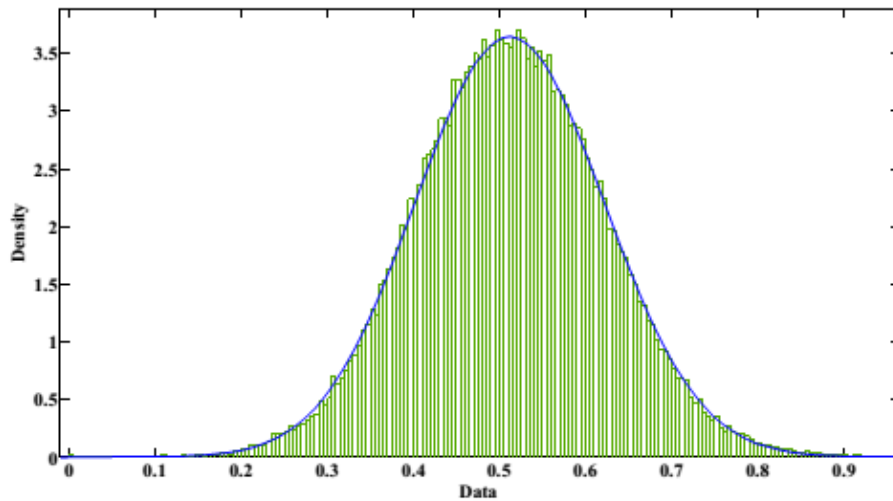
سیگنال سینوسی با فرکانس 70 MHz



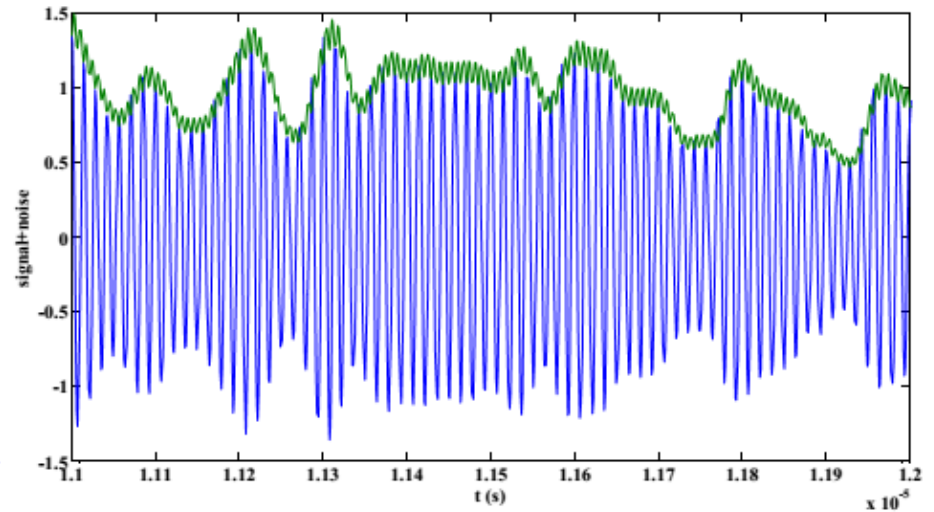
طیف سیگنال و نویز خروجی از فیلتر IF



سیگنال و نویز خروجی از فیلتر IF



تابع چگالی طیف توان پوش سیگنال و نویز  
خروجی فیلتر IF (رایس)

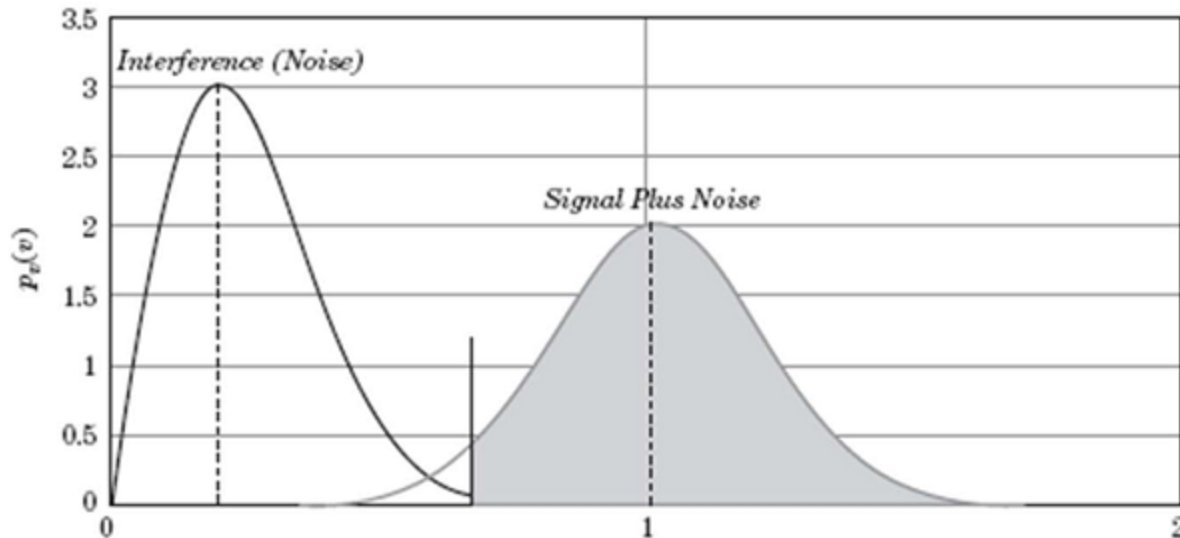


پوش سیگنال و نویز خروجی از فیلتر IF

□ احتمال اینکه پوش سیگنال از سطح آستانه بگذرد

□ احتمال آشکارسازی

$$P_d = \int_{V_T}^{\infty} p_s(R) dR = \int_{V_T}^{\infty} \frac{R}{\psi_0} e^{-\frac{R^2+A^2}{2\psi_0}} I_0\left(\frac{RA}{\psi_0}\right) dR = Q\left[\frac{A}{\sqrt{\psi_0}}, \frac{V_T}{\sqrt{\psi_0}}\right]$$



Marcum's Q function

$$Q[\alpha, \beta] = \int_{\beta}^{\infty} x e^{-\frac{x^2+\alpha^2}{2}} I_0(\alpha x) dx$$

$$\frac{A}{\sqrt{\psi_0}} = \frac{\text{signal amplitude}}{\text{rms noise voltage}} = \frac{\sqrt{2}(\text{rms signal voltage})}{\text{rms noise voltage}}$$

$$= \left(2 \frac{\text{signal power}}{\text{noise power}}\right)^{1/2} = \left(2 \frac{S}{N}\right)^{1/2}$$

$$P_{fa} = e^{-\frac{V_T^2}{2\psi_0}} \quad \longrightarrow \quad \frac{V_T}{\sqrt{\psi_0}} = \sqrt{-2 \ln P_{fa}}$$

$$P_d = Q\left[\sqrt{2SNR}, \sqrt{-2 \ln P_{fa}}\right]$$

□ یک تقریب خوب برای محاسبه عبارت فوق به صورت زیر است

$$P_d \simeq 0.5 \times \text{erfc}\left(\sqrt{-\ln P_{fa}} - \sqrt{SNR + 0.5}\right)$$

$$\text{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-v^2} dv$$

Complementary error function



- یک رادار پالسی دارای مشخصات زیر است
- زمان هشدار اشتباه:  $T_{fa} = 16.67$  minutes
- احتمال آشکارسازی:  $P_d = 0.9$
- پهنای باند:  $B = 1$  GHz
- احتمال هشدار اشتباه و نسبت توان سیگنال به نویز را بدست آورید.

$$P_{fa} = \frac{1}{T_{fa} B} = \frac{1}{10^9 \times 16.67 \times 60} \simeq 10^{-12}$$

$$SNR \simeq 15.75 \text{ dB}$$

- هنگامیکه یک هدف توسط رادار روشن می‌شود، معمولاً تعدادی پالس به سمت رادار منعکس خواهد شد.
- با جمع کردن این پالس‌ها می‌توان احتمال آشکارسازی در رادار را افزایش داد.
- فرایند جمع کردن پالس‌های بازگشتی از سمت هدف به رادار را **تجمیع پالس** گویند.
- برای یک رادار جستجو با فرکانس تکرار پالس  $f_p$  Hz، پهنای بیم آنتن  $\theta_B$  درجه و نرخ اسکن  $\theta_s$  درجه بر ثانیه داریم
  - مدت زمانی که یک هدف نقطه‌ای در بیم آنتن قرار دارد:  $\theta_B / \theta_s$
  - تعداد پالس‌هایی که در یک اسکن از هدف به سمت رادار بازمی‌گردد:  $n = \theta_B / \theta_s f_p$
- به عنوان مثال در یک رادار با فرکانس تکرار پالس 340 Hz، پهنای بیم  $1.5^\circ$  و نرخ چرخش آنتن ۵ دور بر دقیقه (۳۰ درجه بر ثانیه)، تعداد پالس‌های بازگشتی در یک اسکن برابر ۱۷ خواهد شد.



□ تجمیعی که در گیرنده رادار پیش از آشکارساز پوش انجام می‌گیرد را **تجمیع پیش-آشکارسازی** یا **تجمیع همدوس** گویند.

□ این نوع تجمیع به صورت تئوری بی‌اتلاف بوده اما نیازمند این است که فاز سیگنال‌های بازگشتی معلوم بوده و حفظ شوند تا بتوان آن‌ها را به صورت همفاز و بدون اتلاف ترکیب نمود.

□ فرض کنید که  $m$  امین سیگنال بازگشتی به صورت زیر است

$$y_m(t) = s(t) + n_m(t)$$

□ تجمیع همدوس  $n$  پالس نتیجه می‌دهد

$$z(t) = \sum_{m=1}^n y_m(t) = \sum_{m=1}^n [s(t) + n_m(t)] = ns(t) + \sum_{m=1}^n n_m(t)$$

□ توان نویز در  $Z(t)$  برابر است با

$$\begin{aligned}\psi_{0z} &= \left\langle \left( \sum_{m=1}^n n_m(t) \right) \left( \sum_{k=1}^n n_k(t) \right) \right\rangle_{av} \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \langle n_m(t) n_k(t) \rangle_{av} = \sum_{m=k=1}^n \langle n_m^2(t) \rangle_{av} = n \psi_{0y}\end{aligned}$$

□ بنابراین در تجمیع همدوس توان سیگنال  $m^2$  برابر شده ولی توان نویز  $m$  برابر می شود. در نتیجه در این نوع تجمیع، سیگنال به نویز  $m$  برابر خواهد شد.

- نیاز به معلوم بودن فاز سیگنال‌های بازگشتی و حفظ آن‌ها مشکل بوده و در نتیجه در عمل معمولاً از **تجمیع غیر همدوس** استفاده می‌شود.
- به تجمیع پس از آشکارساز پوش، **تجمیع پس-آشکارسازی** یا **تجمیع غیر همدوس** گفته می‌شود.
- استفاده از این نوع تجمیع دارای تلفاتی در مقایسه با تجمیع همدوس است. اگر  $n$  پالس به صورت غیر همدوس تجمیع شوند، سیگنال به نویز حاصل کمتر از  $n$  برابر سیگنال به نویز تک پالس خواهد شد.
- این کاهش در راندمان تجمیع به علت عملیات غیرخطی آشکارساز پوش است که بخشی از انرژی سیگنال را به نویز تبدیل می‌کند.

□ راندمان تجمیع به صورت زیر تعریف می شود

$$E_i(n) = \frac{(SNR)_1}{n(SNR)_n} \leq 1$$

سیگنال به نویز مورد نیاز در حالت تجمیع پالس

سیگنال به نویز مورد نیاز در حالت تک پالس

□ بهبود در سیگنال به نویز به علت تجمیع  $n$  پالس را ضریب بهبود تجمیع

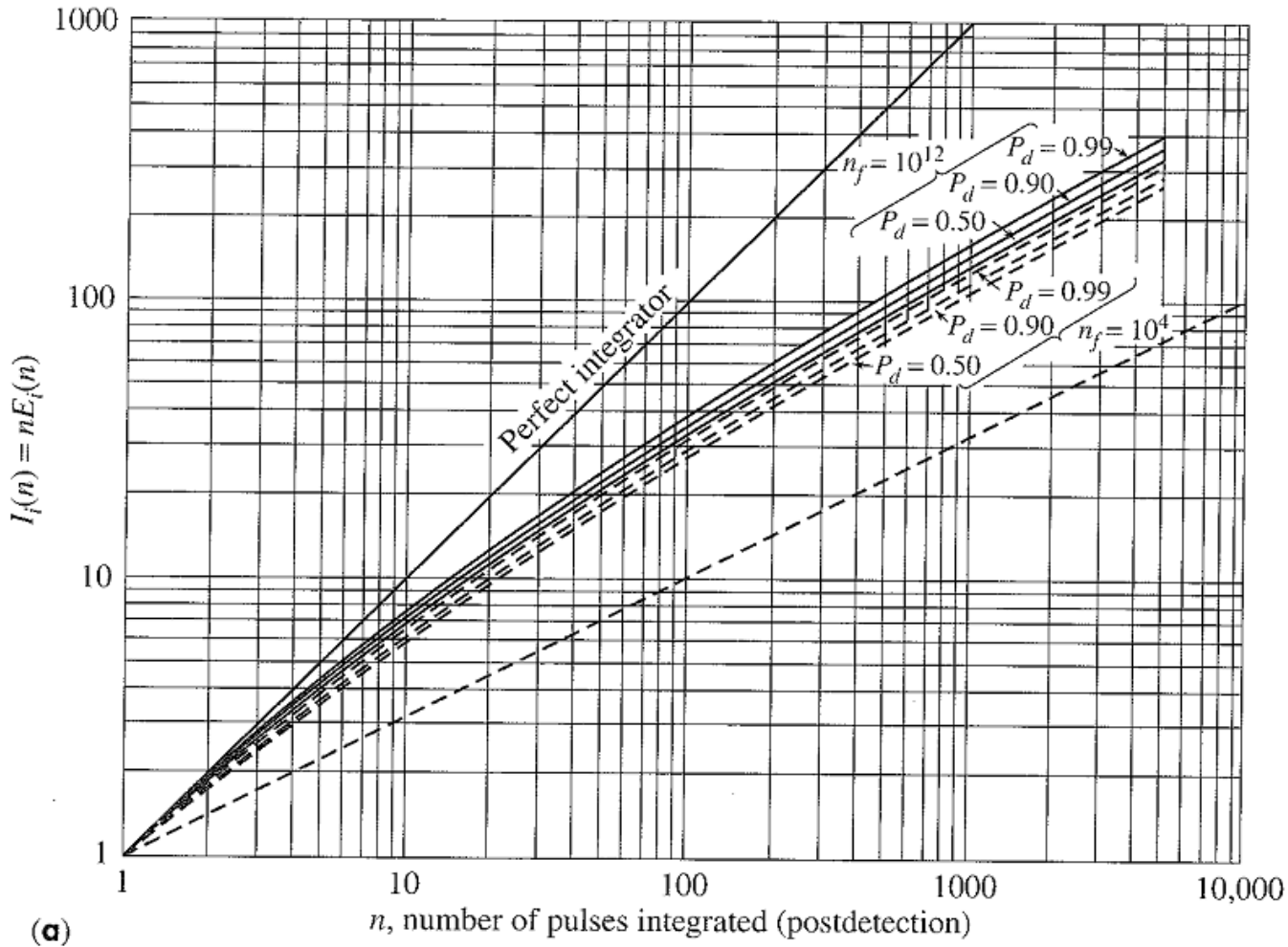
گویند که عبارتست از

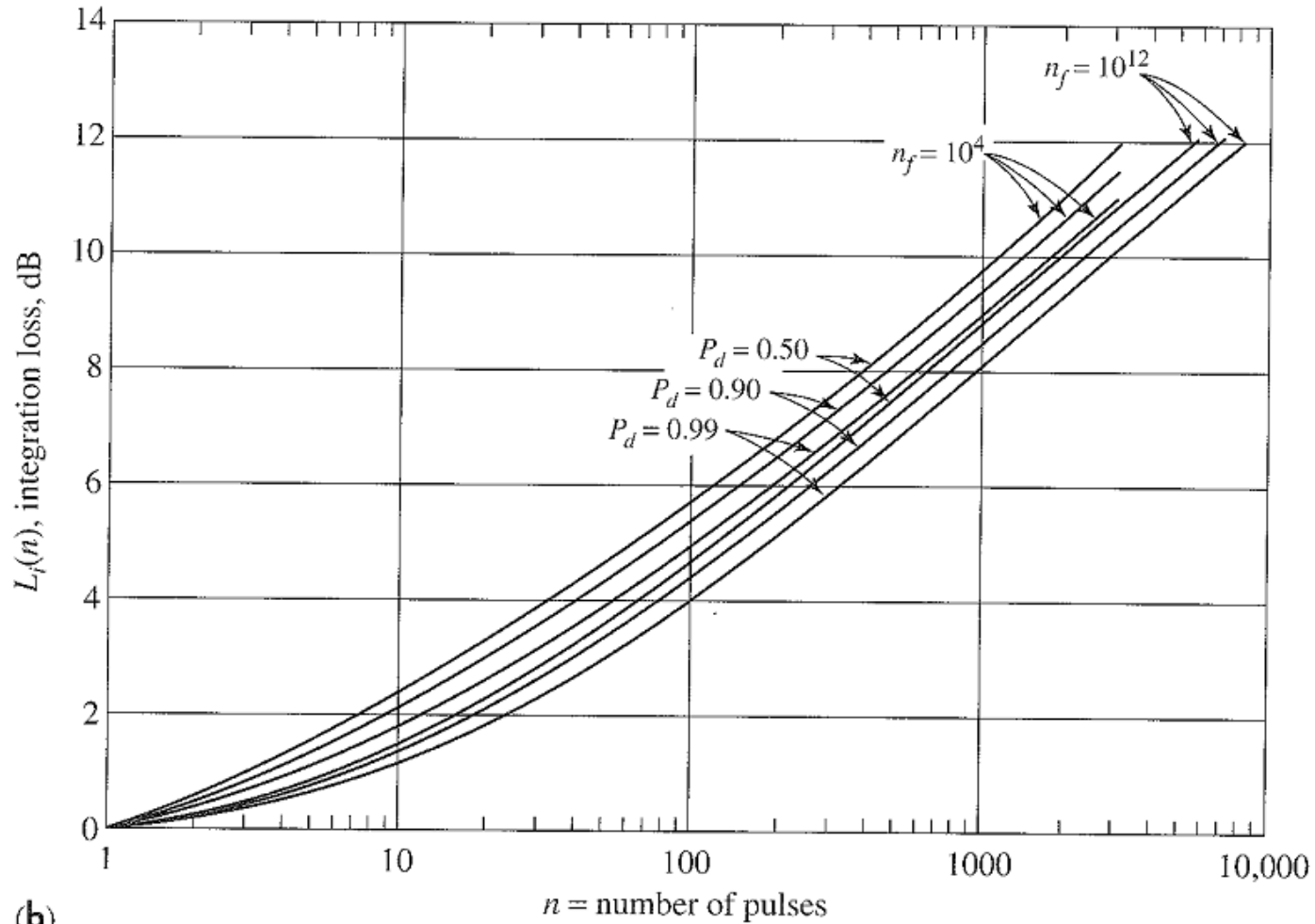
$$I(n) = \frac{(SNR)_1}{(SNR)_n} = nE_i(n) \leq n$$

□ معادله رادار هنگامیکه  $n$  پالس به صورت جمع می شوند، عبارتست از

$$R_{\max}^4 = \frac{P_t G A_e \sigma}{(4\pi)^2 k T_s B_n (SNR)_n} = \frac{P_t G A_e \sigma n E_i(n)}{(4\pi)^2 k T_s B_n (SNR)_1}$$

□ برای تجمیع پالس  
پس-آشکارسازی





(b)

□ حالت تک پالس

$$SNR = A + 0.12AB + 1.7B$$

$$A = \ln\left(\frac{0.62}{P_{fa}}\right) \quad B = \ln\left(\frac{P_d}{1 - P_d}\right)$$

□ خطای کمتر از 0.2 dB به ازای

$$10^{-7} < P_{fa} < 10^{-3} \quad 0.1 < P_d < 0.9$$

□ حالت تجمیع  $n$  پالس به صورت غیرهمدوس

$$(SNR)_n = -5 \ln n + \left(6.2 + \frac{4.54}{\sqrt{n + 0.44}}\right) \ln(A + 0.12AB + 1.7B)$$

□ خطای کمتر از 0.2 dB به ازای

$$1 < n < 8096 \quad 10^{-7} < P_{fa} < 10^{-3} \quad 0.1 < P_d < 0.9$$

□ رادار مثال قبل را در نظر بگیرید. با فرض تجمیع ۱۰ پالس به صورت غیر همدوس، مقدار کاهش در SNR مورد نظر را به دست آورید.

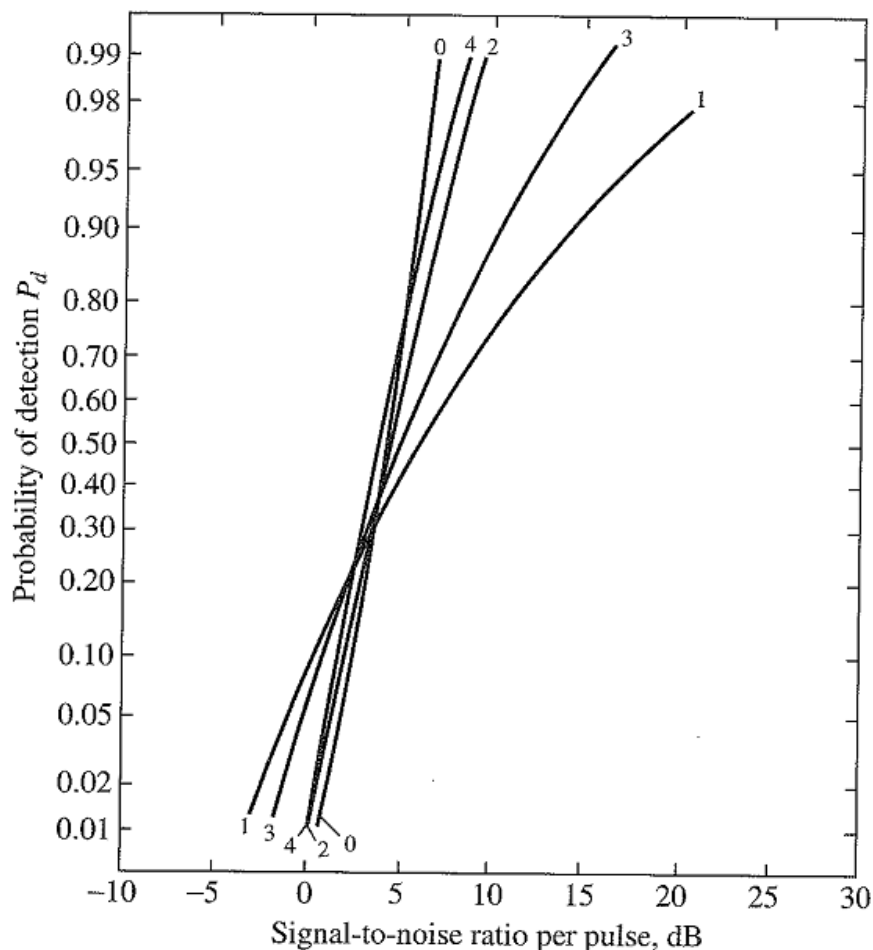
$$I(n) \approx 7.25dB$$

$$(SNR)_n = \frac{(SNR)_1}{I(n)}$$

$$\Rightarrow (SNR)_n = 15.75 - 7.25 = 8.5dB$$



## تجمیع پالس برای مدل های سورلینگ



□ مقایسه‌ای بین چهار مدل سورلینگ و

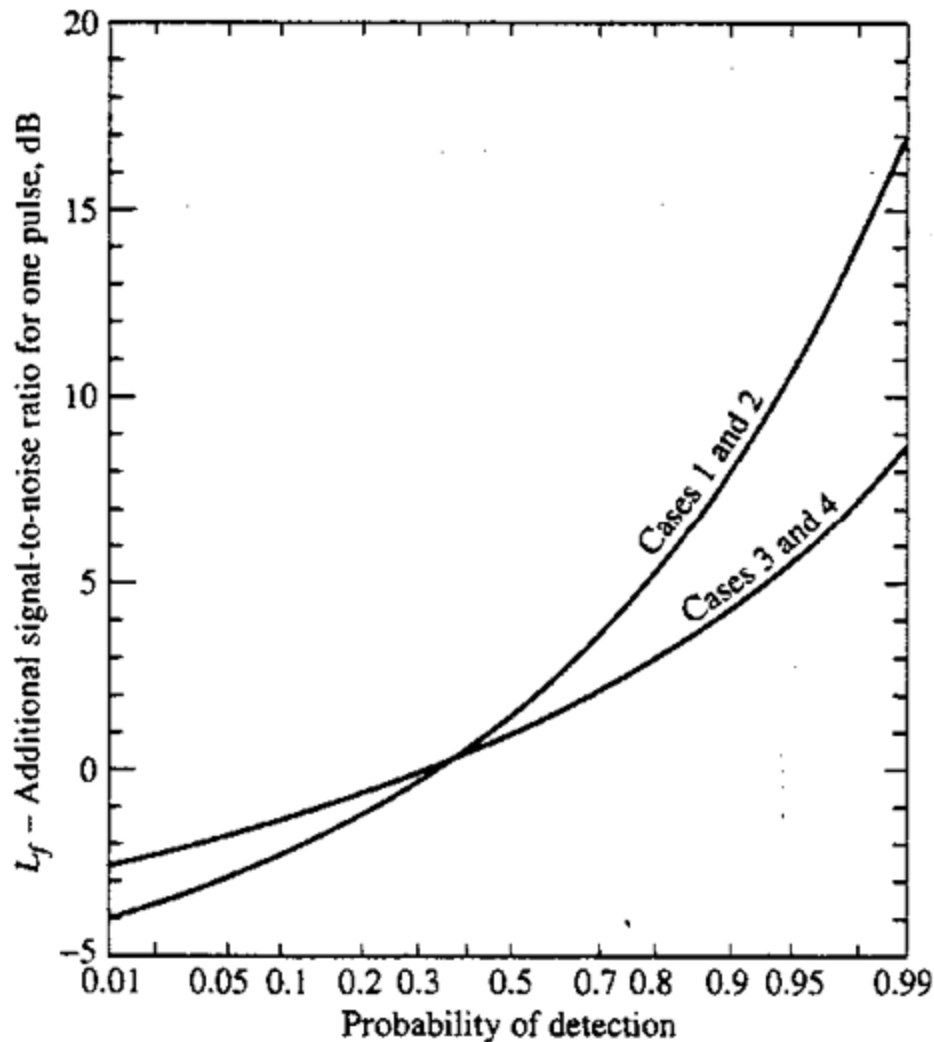
حالت بدون تغییرات (مدل صفر) برای  
تجمیع ۱۰ پالس به صورت غیر همدوس و  
احتمال هشدار اشتباه  $10^{-8}$

□ تغییرات سطح مقطع راداری باعث

می‌شود که مقدار سیگنال به نویز مورد  
نیاز افزایش یابد.

□ برای احتمال‌های آشکارسازی بیش از  
0.3 (که همواره چنین است) مقدار سیگنال  
به نویز مورد نیاز در مدل‌های ۱ و ۳ بیش  
از مقدار آن در مدل‌های ۲ و ۴ است.

# سیگنال به نویز مورد نیاز



□ برای یافتن سیگنال به نویز مورد نیاز برای چهار مدل سورلینگ به ازای مقادیر معین احتمال آشکارسازی، احتمال هشدار اشتباه و تعداد پالس‌های تجمیع شده به ترتیب زیر عمل می‌کنیم

- انتخاب یکی از چهار مدل سورلینگ
- یافتن تلفات ناشی از تغییرات سطح مقطع راداری برای یک پالس ( $L_f$ ) از شکل روبرو

## سیگنال به نویز مورد نیاز

□ یافتن تعداد مؤثر پالس‌ها (تعداد پالس‌های مستقل) از رابطه زیر

$$n_e = 1 + (n - 1) \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \leq n$$

← ضریب همبستگی  $\rho$

■ برای مدل‌های سورلینگ ۲ و ۴،  $\rho = 0$  و  $n_e = n$  و برای مدل‌های سورلینگ ۱ و ۳  $\rho = 1$  و  $n_e = 1$  می‌باشد.

□ بدست آوردن تلفات ناشی از تغییرات سطح مقطع راداری برای  $n_e$  پالس از رابطه زیر

$$L_f(n_e) = (L_f)^{\frac{1}{n_e}}$$

■ که بصورت لگاریتمی نتیجه می‌شود:

$$L_f(n_e) \text{ dB} = \frac{L_f \text{ dB}}{n_e}$$

# سیگنال به نویز مورد نیاز

□ مقدار سیگنال به نویز مورد نیاز

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_1 L_f(n_e)}{nE(n)}$$

سیگنال مورد نیاز برای یک پالس  
در حالت بدون تغییرات سطح مقطع راداری

ضریب بهبود حاصل از تجمیع  $n$  پالس

□ معادله رادار

$$R_{max}^4 = \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma n E_i(n)}{(4\pi)^3 k T_s B_n (L_f)^{\left(\frac{1}{n_e}\right)}}$$

$$R_{max}^4 = \frac{P_t G A_e \sigma n E_i(n)}{(4\pi)^2 k T_0 B F_n (S/N)_1 (L_f)^{1/n_e}}$$

□ مقایسه کنید با رابطه انتهای اسلاید ۲۸ برای حالت بدون نوسان