



اصول و سیستم های رادار

(بخش دوازدهم)

نیم سال دوم ۹۸-۹۹

فیلتر منطبق و تابع ابهام

□ فیلتر منطبق

□ مقدمه

□ پاسخ فرکانسی فیلتر منطبق

□ پاسخ ضربه فیلتر منطبق

□ استخراج پاسخ فرکانسی فیلتر منطبق

□ خروجی فیلتر منطبق

□ تقریب فیلتر منطبق برای یک پالس مستطیلی

□ پیاده سازی فیلتر منطبق

□ تابع ابهام

□ به طور کلی ماکزیمم کردن SNR در گیرنده رادار باعث ماکزیمم شدن احتمال آشکارسازی می شود.

□ شبکه ای که با استفاده از آن می توان SNR را ماکزیمم کرد، **فیلتر منطبق** (**matched filter**) می نامند.

□ بنابراین یک بخش مهم در طراحی تمامی گیرنده های راداری، فیلتر منطبق یا تقریبی از آن است.

پاسخ فرکانسی فیلتر منطبق

□ پاسخ فرکانسی فیلتر منطبق با فرض سفید بودن نویز

$$H(f) = G_a S^*(f) e^{-2j\pi f t_m}$$

ثابت ← G_a

مزدوج طیف سیگنال دریافتی $s(t)$ ← $S^*(f)$

زمانی که خروجی فیلتر منطبق ماکزیمم است (معمولاً برابر با دوره سیگنال) ← t_m

□ طیف سیگنال دریافتی

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$H(f) = |H(f)|e^{-j\varphi_m(f)}$$

$$S(f) = |S(f)|e^{-j\varphi_s(f)}$$

□ با فرض اینکه $G_a = 1$ باشد

$$H(f) = S^*(f)e^{-2j\pi ft_m} \Rightarrow |H(f)|e^{-j\varphi_m(f)} = |S(f)|e^{j[\varphi_s(f)-2\pi ft_m]}$$

$$|S(f)| = |H(f)|$$

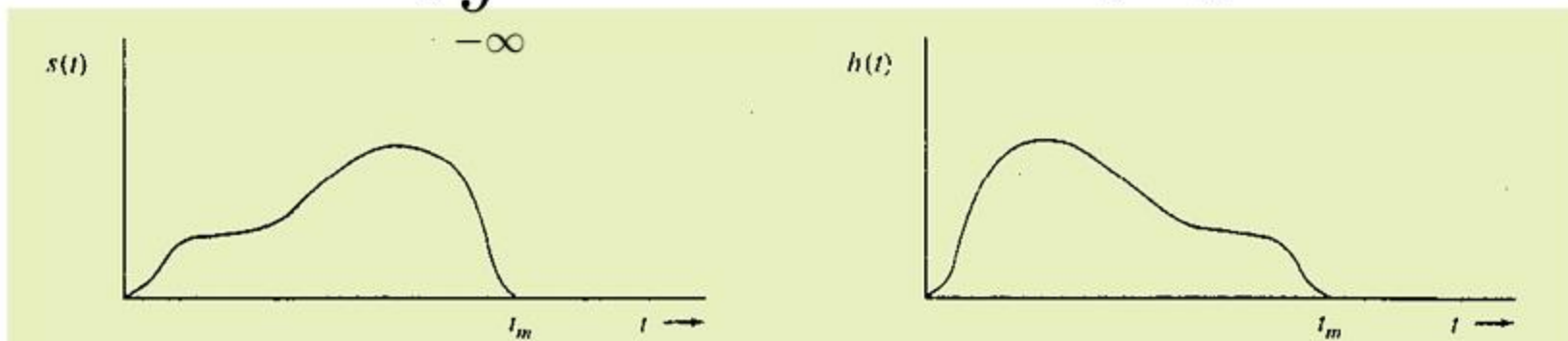
$$\varphi_m(f) = -\varphi_s(f) + 2\pi ft_m$$

□ فیلتر منطبق را می توان با استفاده از پاسخ ضربه که از تبدیل فوریه معکوس پاسخ فرکانسی بدست می آید نیز توصیف کرد:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df = G_a \int_{-\infty}^{\infty} S^*(f) e^{-j2\pi f(t_m - t)} df$$

$$S^*(f) = S(-f)$$

$$h(t) = G_a \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f(t_m - t)} df = G_a s(t_m - t)$$



استخراج پاسخ فرکانسی فیلتر منطبق

(۵) فیلتر منطبق
و تابع ابهام

7

□ پاسخ فرکانسی فیلتر منطبق را می توان با استفاده از نامساوی شوارتز بدست آورد.

□ هدف ماکزیمم کردن نسبت زیر است:

$$R_f = \frac{|s_0(t)|_{\max}^2}{N}$$

سیگنال خروجی فیلتر →
توان نویز خروجی →

□ اندازه ولتاژ خروجی فیلتری با پاسخ فرکانسی $H(f)$

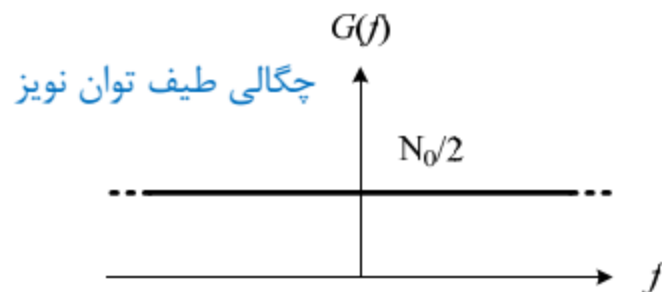
$$S_0(f) = S(f)H(f) \quad \longrightarrow \quad |s_0(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi ft} df \right|$$

استخراج پاسخ فرکانسی فیلتر منطبق

(۵) فیلتر منطبق
و تابع ابهام

8

$$|s_0(t)|_{\max} = \left| \int_{-\infty}^{\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi ft_m} df \right|$$



□ توان نویز خروجی

$$N = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

$$R_f = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi ft_m} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}$$

□ نسبت R_f

استخراج پاسخ فرکانسی فیلتر منطبق

(۵) فیلتر منطبق
و تابع ابهام

9

□ اگر P و Q توابع مختلطی باشند، نامساوی شوارتز به صورت زیر است:

$$\int P^* P dx \int Q^* Q dx \geq \left| \int P^* Q dx \right|^2$$

□ تساوی زمانی برقرار است که $P = kQ$

□ قرار می دهیم $P^* = S(f)e^{j2\pi f t_m}$ $Q = H(f)$

□ بنابراین داریم

$$R_f \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2}}$$

استخراج پاسخ فرکانسی فیلتر منطبق

(۵) فیلتر منطبق
و تابع ابهام

10

□ مطابق با قضیه پارسوال داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \text{Signal Energy} = E$$

□ بنابراین

$$R_f \leq \frac{2E}{N_0}$$

□ نسبت پیک سیگنال به توان نویز خروجی از فیلتر منطبق، فقط به کل انرژی سیگنال دریافتی و توان نویز بر واحد هرتز بستگی دارد.

استخراج پاسخ فرکانسی فیلتر منطبق

(۵) فیلتر منطبق
و تابع ابهام

11

□ زمانی $R_f = \frac{2E}{N_0}$ خواهد بود که

$$P = S^*(f)e^{-j2\pi ft_m} = kQ = kH(f)$$



$$H(f) = \frac{1}{k} S^*(f)e^{-j2\pi ft_m} = G_0 S^*(f)e^{-j2\pi ft_m}$$

□ در محاسبات فیلتر منطبق فرض می شود که به غیر از تغییر در دامنه، سیگنال ورودی به گیرنده همان شکل سیگنال ارسالی را داشته باشد.

□ خروجی یک فیلتر خطی، از محاسبه کانولوشن ورودی و پاسخ ضربه فیلتر بدست می آید.

$$y_{in}(t) = s(t) + n(t) \quad y_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_{in}(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$$

□ پاسخ ضربه فیلتر منطبق

$$h(t) = s(t_m - t) \quad h(t - \lambda) = s(t_m - t + \lambda)$$

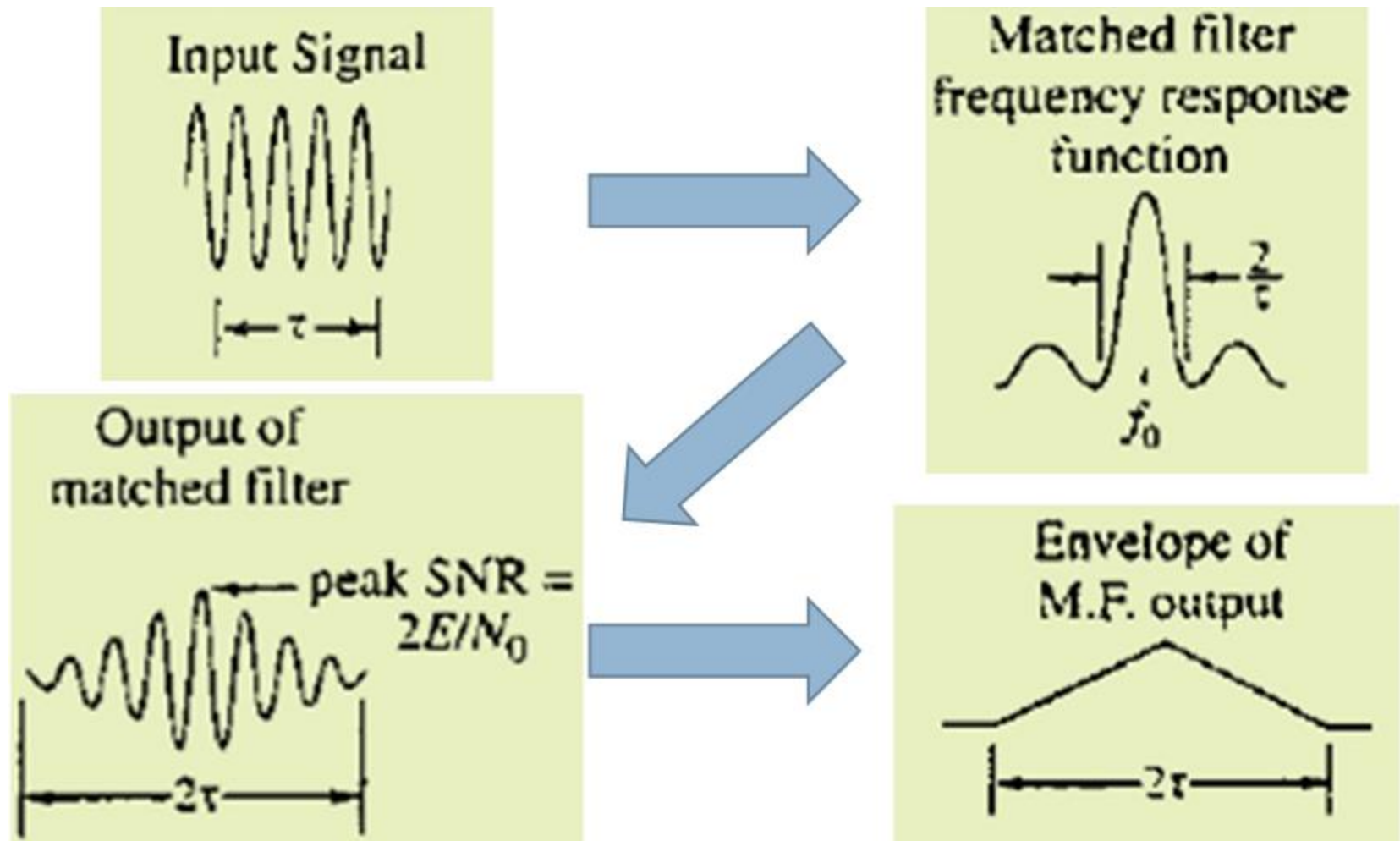
□ خروجی فیلتر منطبق

$$y_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_{in}(\lambda) s(t_m - t + \lambda) d\lambda$$

(٥) فیلتر منطبق
و تابع ابهام

مثال

13



تقریب فیلتر منطبق برای یک پالس مستطیلی

- پیشگامان صنعت رادار در دهه ۳۰ میلادی با مفهوم فیلتر منطبق آشنا نبودند.
- اما آنان به تجربه دریافته بودند که چگونه می توان نسبت سیگنال به نویز خروجی را برای یک شکل موج پالسی ماکزیمم کنند.
- آن ها دریافته بودند که اگر پهنای باند گیرنده خیلی بیشتر از پهنای باند سیگنال رادار باشد، نویز اضافی ایجاد شده و در نتیجه نسبت سیگنال به نویز کاهش می یابد.
- از طرف دیگر اگر پهنای باند گیرنده خیلی باریک باشد، نویز کاهش یافته اما انرژی سیگنال نیز کاهش می یابد. بنابراین در این حالت نیز نسبت سیگنال به نویز کاهش می یابد.

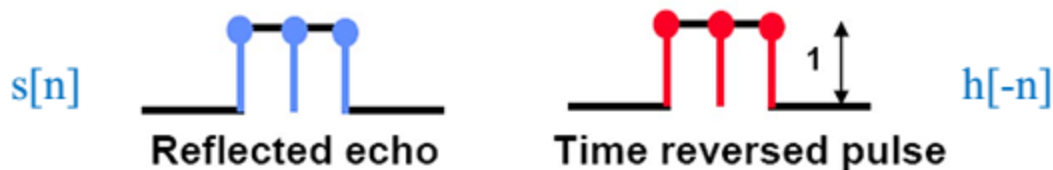
تقریب فیلتر منطبق برای یک پالس مستطیلی

- به این ترتیب یک مقدار بهینه برای پهنای باند گیرنده وجود دارد که نسبت سیگنال به نویز را ماکزیمم می کند.
- تجربه نشان می دهد که برای پالس های مستطیلی شکل، ماکزیمم سیگنال به نویز زمانی رخ می دهد که پهنای باند گیرنده تقریباً عکس پهنای پالس باشد.
- در عمل فیلتر منطبق به صورت ایده آل قابل پیاده سازی نبوده و معمولاً تلفاتی در نسبت سیگنال به نویز وجود خواهد داشت.
- نسبت سیگنال به نویز خروجی فیلتر غیرمنطبق به سیگنال به نویز فیلتر منطبق را راندمان فیلتر گویند.

□ مقدار $\beta\tau$ بهینه برای فیلترهای مختلف و دو نوع شکل پالس

Input signal	Filter	Optimum $B\tau$	Loss in SNR, dB
Rectangular pulse	Third-order Bessel filter	0.78	0.47
Rectangular pulse	Quadruply tuned (Butterworth)	1.06	0.48
Rectangular pulse	Double tuned (Butterworth)	0.81	0.46
Rectangular pulse	5 cascaded single-tuned stages	0.67	0.51
Rectangular pulse	2 cascaded single-tuned stages	0.61	0.56
Rectangular pulse	Single tuned	0.40	0.88
Rectangular pulse	Rectangular	1.37	0.85
Rectangular pulse	Gaussian	0.74	0.51
Gaussian pulse	Rectangular	0.74	0.51
Gaussian pulse	Gaussian	0.44	0 (matched)

□ فیلتر منطبق با محاسبه کانولوشن سیگنال بازگشتی و سیگنال ارسالی معکوس شده در زمان بدست می آید.

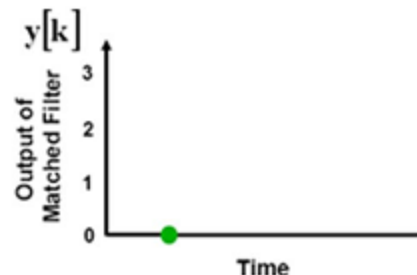
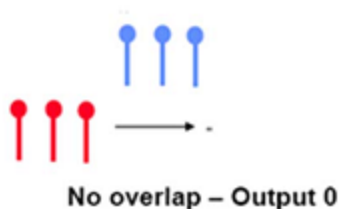


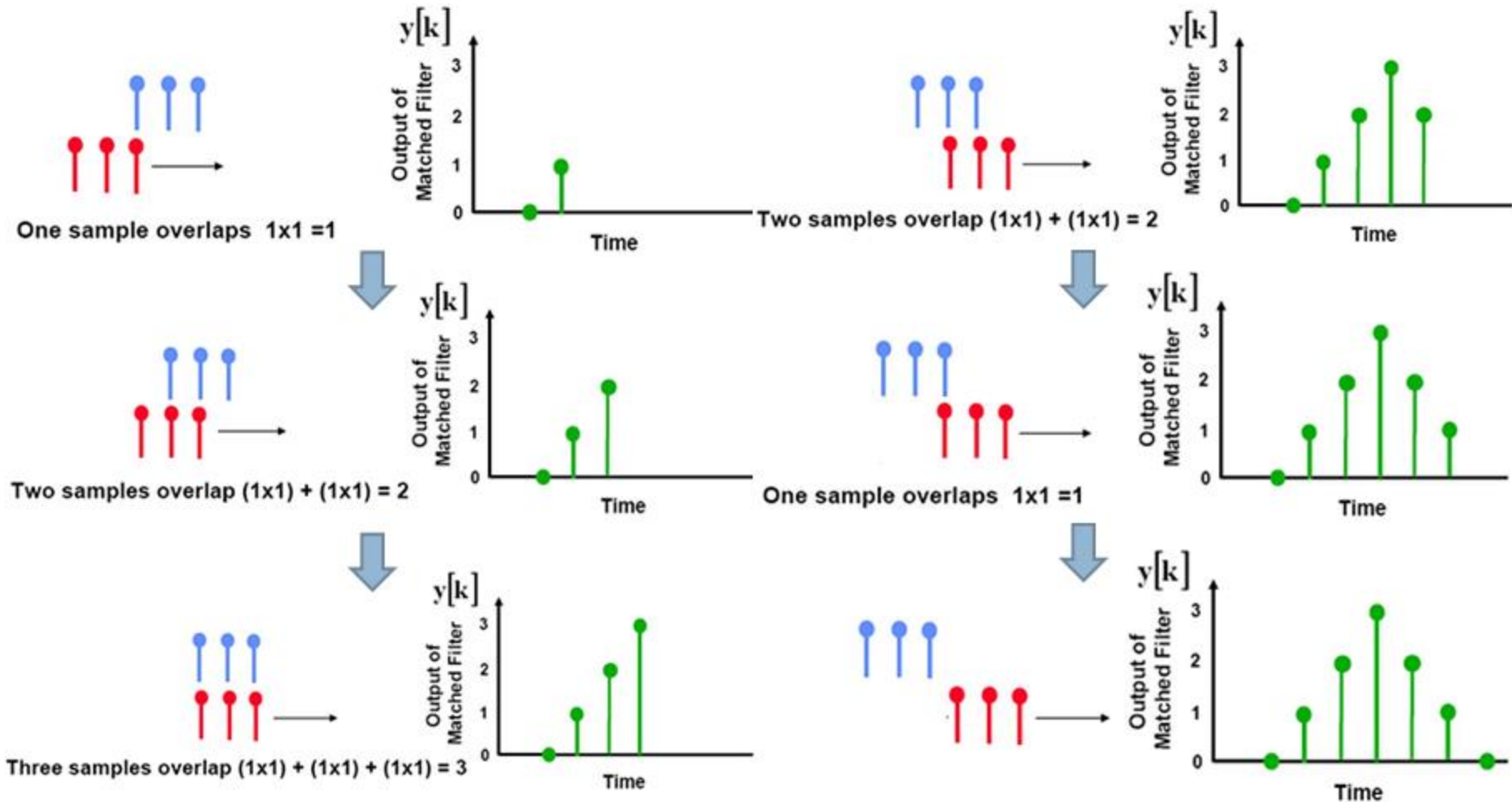
□ فرآیند کانولوشن

$$y[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]h[k-n]$$

□ حرکت پالس های دیجیتال از روی هم

□ ضرب نمونه ها در هم و جمع آن ها





- مقدمه
- استخراج تابع ابهام
- ویژگی های تابع ابهام
- تابع ابهام ایده آل
- تابع ابهام برای یک پالس
- تابع ابهام برای قطار پالس
- جمع بندی

- در تعریف فیلتر منطبق، فرض بر این بود که سیگنال بازگشتی نسخه ای از سیگنال ارسالی است که دچار تغییر دامنه و تأخیر زمانی شده است.
- هنگامیکه بین رادار و هدف سرعت شعاعی وجود داشته باشد، یک شیفت فرکانسی (شیفت داپلر) نیز به سیگنال بازگشتی اعمال خواهد شد.
- این شیفت داپلر باعث ایجاد یک عدم تطبیق ناخواسته بین سیگنال بازگشتی و فیلتر منطبق می شود.
- برای توصیف پاسخ فیلتر منطبق در حضور شیفت فرکانس داپلر، از **تابع ابهام** استفاده می شود.

□ هنگامیکه سیگنال بازگشتی در مقایسه با نویز بسیار بزرگتر باشد، می توان خروجی فیلتر منطبق را به صورت زیر نوشت:

$$\text{output of matched filter} = \int_{-\infty}^{\infty} s_r(\lambda) s(t_m - t + \lambda) d\lambda$$

سیگنال دریافتی سیگنال ارسالی

□ برای سادگی و با در نظر گرفتن شرط تحقق پذیری فیلتر:

$$t_m = 0$$

↓

$$\text{output} = \int_{-\infty}^{\infty} s_r(\lambda) s(\lambda - t) d\lambda$$

□ شکل نمایش مختلط سیگنال ارسالی:

$$s(t) = |u(t)| \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$u(t) = |u(t)| e^{j\varphi}$$

$$s(t) = \text{Re} \left\{ u(t) e^{j2\pi f_0 t} \right\} = \text{Re} \left\{ x(t) \right\}$$

$$x(t) = u(t) e^{j2\pi f_0 t}$$

□ شکل نمایش مختلط سیگنال دریافتی:

$$x_r(t) = u(t - T_0) e^{j2\pi(f_0 + f_d)(t - T_0)}$$

□ پاسخ فرکانسی و پاسخ ضربه فیلتر منطبق براساس شکل نمایش مختلط سیگنال ارسالی:

$$H(f) = X^*(f) \quad h(t) = x^*(-t)$$

□ خروجی فیلتر منطبق

$$\text{output} = \int_{-\infty}^{\infty} x_r(\lambda) x^*(\lambda - t) d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda - T_0) u^*(\lambda - t) e^{j2\pi(f_0 + f_d)(\lambda - T_0)} e^{-j2\pi f_0(\lambda - t)} d\lambda$$

□ برای ساده تر شدن فهم رابطه ی قبل قرار می دهیم:

$$T_0 = 0 \quad f_0 = 0$$

□ خروجی فیلتر منطبق

$$A(t, f_d) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) u^*(\lambda - t) e^{j2\pi f_d \lambda} d\lambda$$

□ تابع ابهام

$$\text{Ambiguity Function} = |A(t, f_d)|^2$$

□ نمودار سه بعدی تابع ابهام بر حسب t و f_d را **دیاگرام ابهام** گویند.

□ مقدار ماکزیمم تابع ابهام

$$|A(t, f_d)|_{\max}^2 = |A(0, 0)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) u^*(\lambda) d\lambda$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(\lambda)|^2 d\lambda = E \quad s(t) = |u(t)| \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |s(\lambda)|^2 d\lambda &= \int_{-\infty}^{\infty} |u(\lambda)|^2 \cos^2(2\pi f_0 \lambda + \varphi) d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |u(\lambda)|^2 d\lambda + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |u(\lambda)|^2 \cos(4\pi f_0 \lambda + 2\varphi) d\lambda \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |u(\lambda)|^2 d\lambda = E$$

$$|A(t, f_d)|_{\max}^2 = |A(0, 0)|^2 = 2E$$

□ تقارن حول مبدأ

$$\begin{aligned} |A(-t, -f_d)|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) u^*(\lambda + t) e^{-j2\pi f_d \lambda} d\lambda \right|^2 \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha - t) u^*(\alpha) e^{-j2\pi f_d (\alpha - t)} d\alpha \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left| e^{-j2\pi f_d t} \int_{-\infty}^{\infty} u^*(\alpha - t) u(\alpha) e^{j2\pi f_d \alpha} d\alpha \right|^2 \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} u^*(\alpha - t) u(\alpha) e^{j2\pi f_d \alpha} d\alpha \right|^2 = |A(t, f_d)|^2 \end{aligned}$$

□ رفتار بر روی محور t

$$|A(t, 0)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) u^*(\lambda - t) d\lambda \right|^2$$

□ رفتار بر روی محور f_d

$$|A(0, f_d)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} |u(\lambda)|^2 e^{j2\pi f_d \lambda} d\lambda \right|^2$$

□ حجم زیر سطح دیاگرام ابهام

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A(t, f_d)|^2 dt df_d = (2E)^2$$

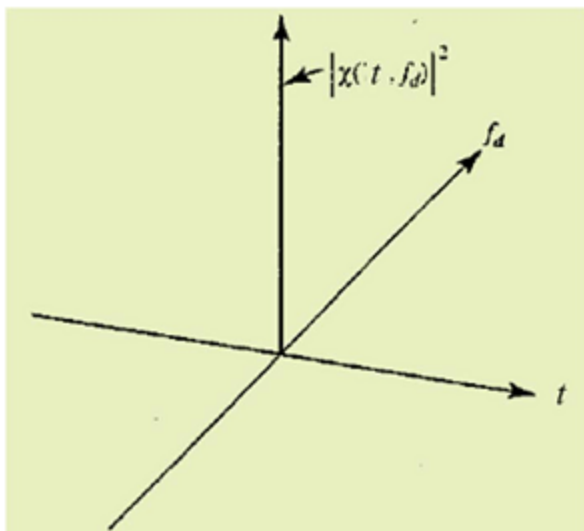
□ اگر هیچگونه محدودیت تئوری وجود نداشته باشد، دیاگرام ابهام ایده آل باید شامل یک پیک با ضخامت بینهایت کوچک در مبدأ و صفر در بقیه نواحی باشد.

□ در واقع دیاگرام ابهام باید به صورت تابع ضربه بوده و هیچگونه ابهامی در برد و فرکانس داپلر وجود نداشته باشد.

□ ضخامت بینهایت کوچک دیاگرام ابهام در مبدأ باعث می شود که

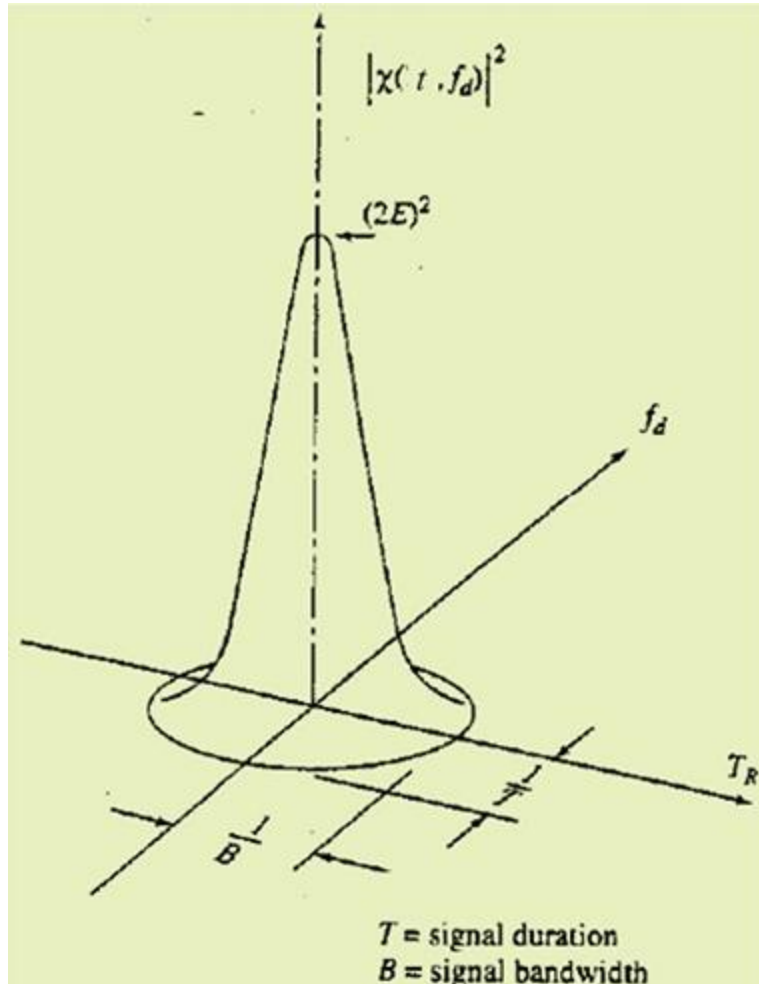
□ تأخیر زمانی و فرکانس داپلر به صورت همزمان و با دقت بالا اندازه گیری شود.

□ قدرت تفکیک در حوزه برد و داپلر بسیار بالا باشد.



- تحقق چنین دیاگرام ابهامی به صورت تئوری امکانپذیر نیست.
- زیرا ماکزیمم مقدار تابع ابهام برابر با $(2E)^2$ بوده و از طرف دیگر حجم زیر سطح تابع نیز برابر با $(2E)^2$ است.
- درک بهتر محدودیت ها برروی تابع ابهام با استفاده از مثال جعبه شن.
- به طور کلی با توجه به ماهیت تابع ابهام، یک رابطه معکوس بین دقت و قدرت تفکیک از یک طرف و ابهام از طرف دیگر وجود دارد.

تابع ابهام آرمانی



- نمونه ای از یک دیاگرام ابهام غیرایده آل
- شکل موج متناظر با این تابع ابهام منجر به ابهام در اندازه گیری برد یا فرکانس نمی شود. زیرا این تابع ابهام فقط یک پیک دارد.
- معمولاً دیاگرام های ابهامی که فقط یک پیک دارند، در راستای زمان و فرکانس پهن بوده و در نتیجه منجر به دقت و قدرت تفکیک ضعیفی می شوند.
- بنابراین در عمل معمولاً توابع ابهام دارای پاسخ قابل توجهی بیرون از ناحیه باریک حول مبدأ می باشند.

تابع ابهام برای یک پالس

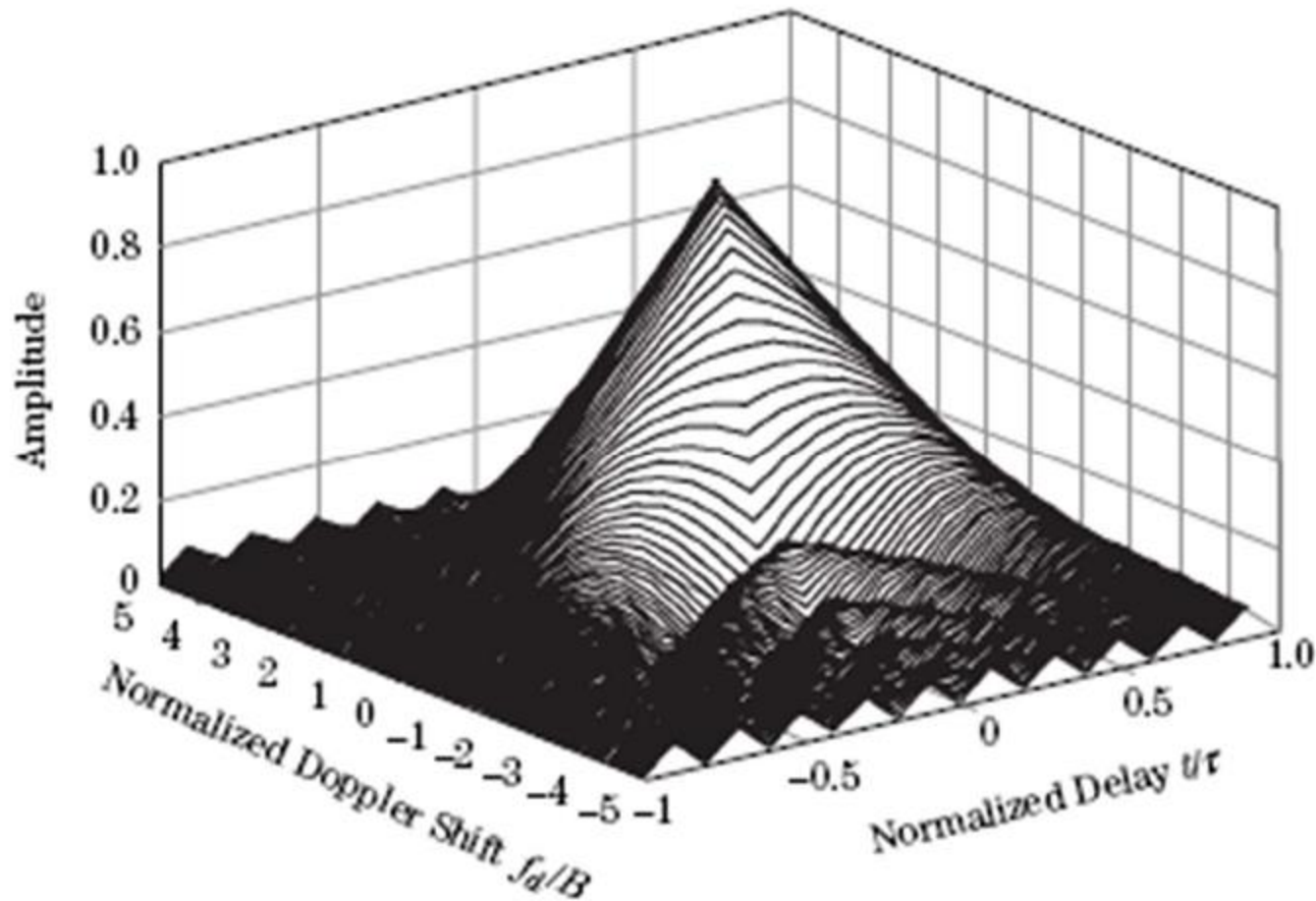
32

□ یک پالس مستطیلی با پهنای τ

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}$$

□ تابع ابهام نرمالیزه

$$|A(t, f_d)|^2 = \left| \left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right) \frac{\sin \left(\pi f_d \tau \left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right) \right)}{\pi f_d \tau \left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right)} \right|^2 \quad |t| \leq \tau$$



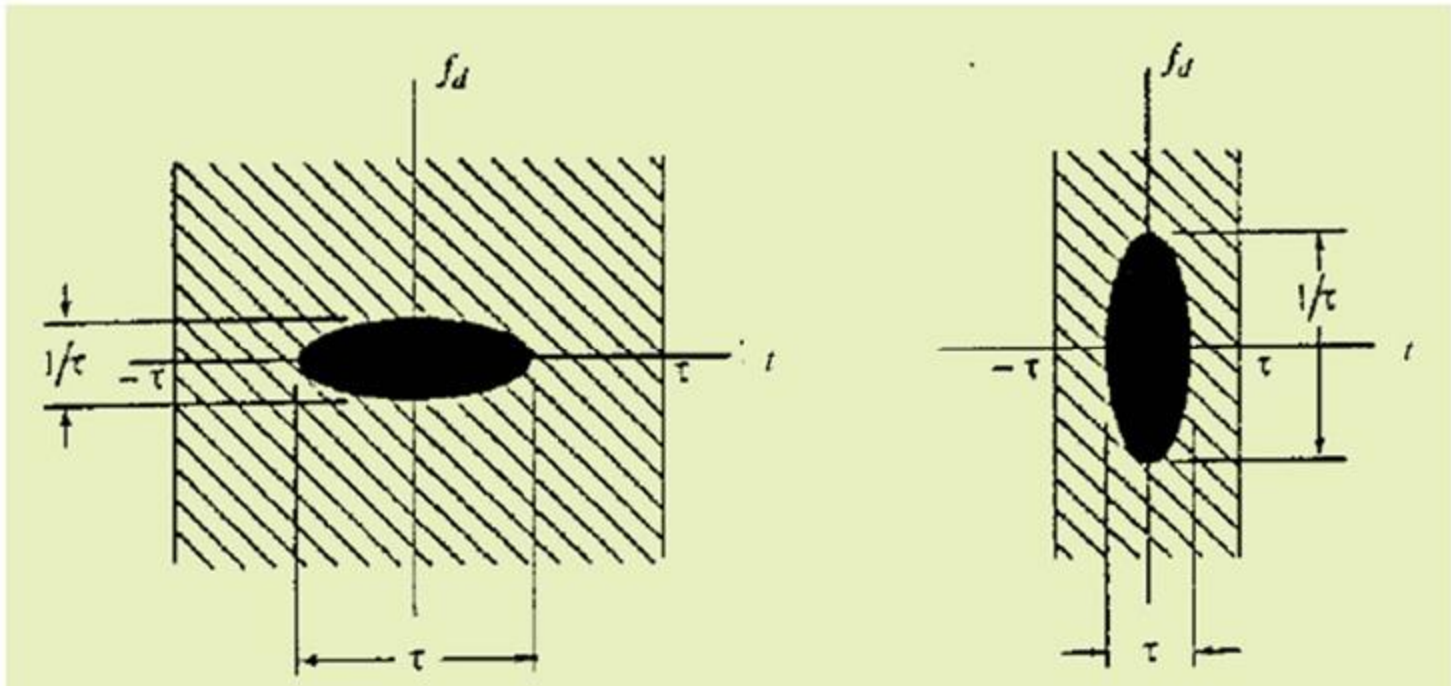
□ به ازای $f_d = 0$ ، تابع ابهام برابر با توان دو خروجی فیلتر منطبق به ازای ورودی پالس مستطیلی خواهد شد.

$$|A(t, 0)|^2 = \left| 1 - \frac{|t|}{\tau} \right|^2 \quad |t| \leq \tau$$

□ و به ازای $t = 0$ داریم:

$$|A(0, f_d)|^2 = \left| \frac{\sin(\pi f_d \tau)}{\pi f_d \tau} \right|^2$$

□ اطلاعات حاصل از دیاگرام ابهام را می توان به صورت ساده تر با استفاده از نمودارهای دو بعدی، مانند نمودارهای زیر برای پالس پهن و باریک، بدست آورد.



تابع ابهام برای قطار پالس

36

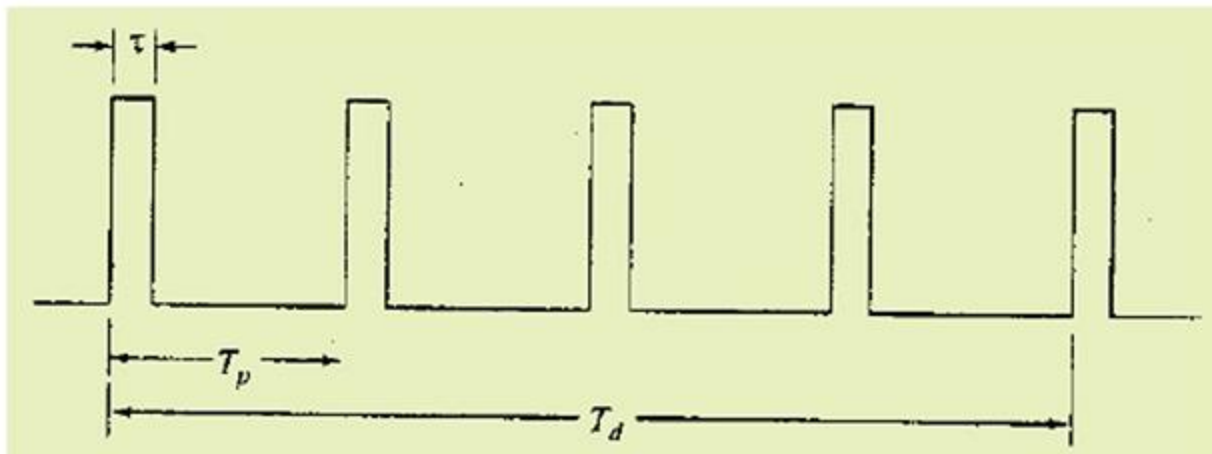
□ قطار پالس در باند پایه

□ ۵ پالس

□ پهنای پالس τ

□ دوره تکرار پالس T_p

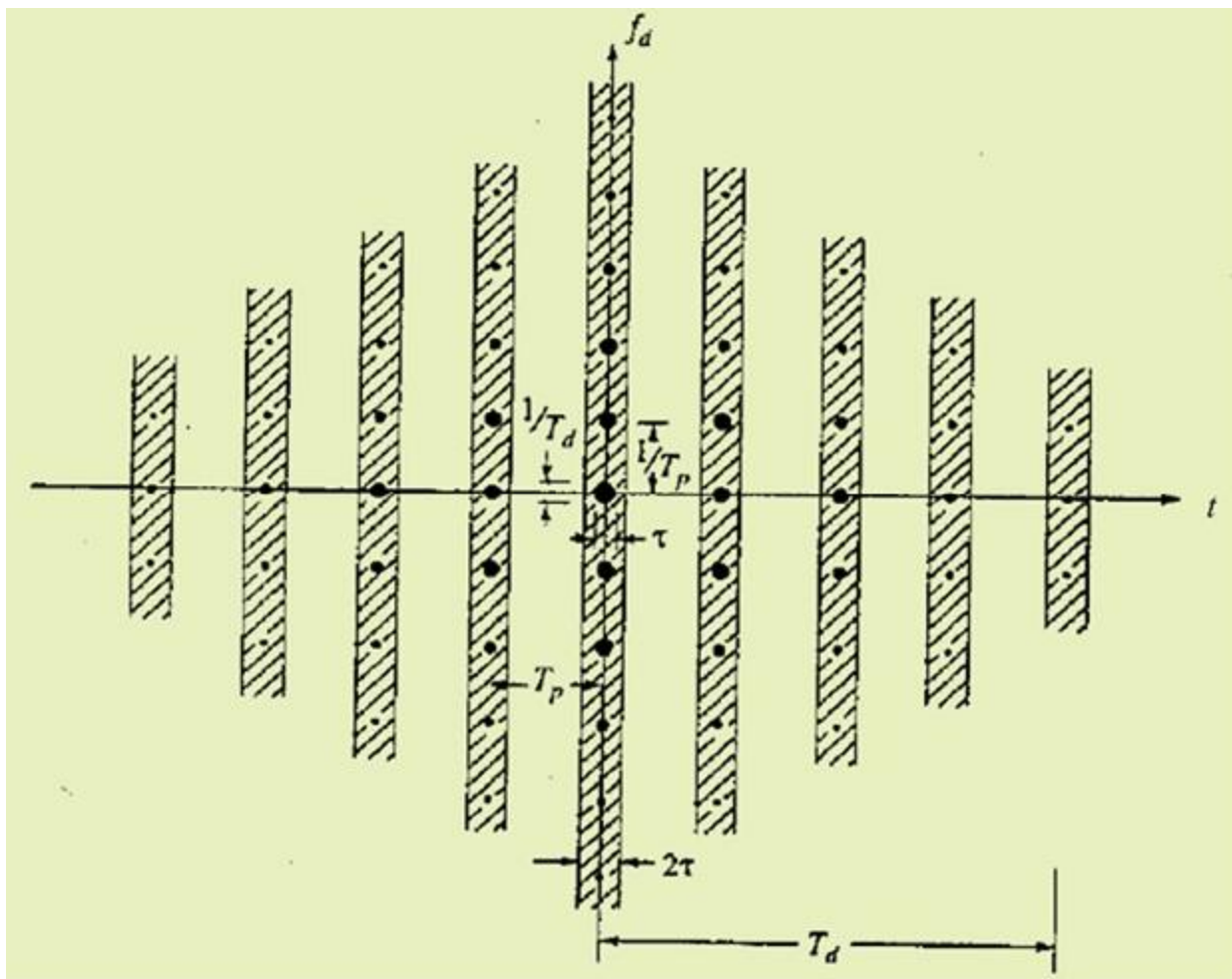
□ کل بازه زمانی T_d



(۵) فیلتر منطبق
و تابع ابهام

تابع ابهام برای قطار پالس

37



- در نگاه اول به نظر می رسد که با وجود ابهام های زیادی، شکل موج قطار پالس انتخاب نامناسبی باشد.
- اما با دقت در ضربه موجود در مبدأ داریم
- این ضربه دارای عرض τ در راستای محور زمان و عرض $1/T_d$ در راستای محور فرکانس است.
- بنابراین دقت اندازه گیری زمان (که توسط عرض پالس تعیین می شود) مستقل از دقت اندازه گیری برکانس (که توسط کل دوره زمانی تعیین می شود) است.
- حال اگر دوره تکرار پالس به گونه ای انتخاب شود که تأخیر زمانی هیچ هدفی بیش از T_p و شیفیت داپلر بیش از $1/T_p$ نباشد، آنگاه دیاگرام ابهام مؤثر به یک ضربه تنها در مبدا با ابعاد τ و $1/T_d$ کاهش می یابد.
- بنابراین قطار پالس در مقایسه با یک پالس تنها، شکل موج راداری مناسبی است.

□ شکل موج ارسالی توسط رادار می تواند موارد زیر را تحت تأثیر قرار دهد:

□ دقت اندازه گیری

□ قدرت تفکیک

□ ابهام

□ به طور کلی می توان از دیاگرام ابهام برای ارزیابی شکل موج راداری در رابطه موارد فوق استفاده کرد.