**تمرین ۱:** حاصلضرب ماتریس های زیر را بدست آورید:

a)
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 1 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 6 & 1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -9 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**تمرین ۲:** دستگاه های زیر را حل کنید:

a)
$$\begin{cases} x+y+2z=8 \\ 3x-y+z=0 \\ -x+3y+4z=-4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x-2y+z=-2 \\ x-y+3z=5 \\ -x+y+z=-1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x_1+8x_2-3x_3-14x_4=2 \\ 2x_1+3x_2-x_3-2x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3+10x_4=0 \\ x_1+5x_2-2x_3-12x_4=1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=4 \\ 3x_2-x_3+4x_4=2 \\ x_1+2x_2-3x_3+5x_4=0 \\ x_1+x_2-5x_3+8x_4=-3 \end{cases}$$

**تمرین ۳:** شرط هایی روی $a, b, c$ بیابید بطوریکه دستگاه های زیر سازگار باشند:

a)
$$\begin{cases} x-2y=1 \\ ax+by=5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x+y-z=a \\ x-y+2z=b \\ 5x+3y-4z=c \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x+ay=0 \\ y+bz=0 \\ z+cx=0 \end{cases}$$

**تمرین ۴:** ماتریس های زیر را معکوس پذیری بررسی کنید:

a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1-a & a^2+1 \\ 1 & 2-a & -1 & -2a^2 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ -5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

**تمرین ۵:** نشان دهید که ماتریس های زیر با شرط داده شده معکوس پذیرند.

$$\begin{bmatrix} p & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ y & c & r \end{bmatrix} \quad abc \neq 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c \neq a \\ b \neq a \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تمرین اول

۱- ...
$$\vec{z} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

a) $\vec{u} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{Bmatrix}$  
b) $\vec{u} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{Bmatrix}$  
c) $\vec{v} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

۳- ...

a)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \quad\;\; + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 10x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

۴- ...

a) $RANK(A) = 2$   b) ...   c) ...

۲- ...

a)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \qquad\; - 5x_5 = 2 \\ x_2 + x_3 \qquad\quad - 4x_5 = -1 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -1 \\ -4x_3 + x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

b) ...

۵- ...   $AB - BA = I$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$   
b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & -11 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & c \\ 3 & c & 2 \end{bmatrix}$   
d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & c \end{bmatrix} \quad c \neq 0$

۷- ... $A^2 = 0$ ... $(I - A)^{-1} = I + A$

**۱- کدامیک از ماتریس‌های زیر به فرم سطری پلکانی کاهش یافته (RREF) است؟**

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**۲- ماتریس U را طوری بیابید که RREF(A) = UA باشد.**

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$  b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

**۳- ماتریس U را طوری بیابید که UA = B باشد.**

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ; $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ; $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

**۴- ماتریس‌های معکوس‌پذیر U و V را طوری بیابید که $UAV = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد.**

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$  b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$  c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

**۵- تبدیل خطی زیر را بیابید.**

a) $T\left\{\begin{smallmatrix}1\\1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right\} = \left\{\begin{smallmatrix}2\\3\\-1\end{smallmatrix}\right\}$ ; $T\left\{\begin{smallmatrix}0\\-1\\1\\1\end{smallmatrix}\right\} = \left\{\begin{smallmatrix}0\\-1\\0\end{smallmatrix}\right\}$ → $T\left\{\begin{smallmatrix}1\\-2\\-3\end{smallmatrix}\right\} = ?$

b) $T\left\{\begin{smallmatrix}5\\-1\\2\\-4\end{smallmatrix}\right\} = ?$  $T\left\{\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\1\end{smallmatrix}\right\} = \left\{\begin{smallmatrix}5\\+1\\-3\end{smallmatrix}\right\}$ ; $T\left\{\begin{smallmatrix}-1\\0\\2\\1\end{smallmatrix}\right\} = \left\{\begin{smallmatrix}2\\0\\1\end{smallmatrix}\right\}$

**۶- نشان دهید که $T_\theta$ تبدیل خطی است:**

دوران تبدیل خطی که $T_\theta : R^2 \rightarrow R^2$ با ماتریس $T_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$

a) $T_\theta \circ R_{2\varphi} = T_{\theta - \varphi}$  b) $R_{2\varphi} \circ T_\theta = T_{\theta - \varphi}$

**۷- تجزیه LU ماتریس‌های زیر را بیابید.**

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & -4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$  b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

۷- معکوس ماتریس‌های زیر را با روش گاوسی $PA = LU$ بیابید. پاسخ را با $LU$ نشان دهید.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

**۱- حاصل‌ضرب ماتریس‌های زیر را حساب کنید:**

a) $\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix}$
b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

اگر $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -1$ حساب کنید:

a) $\begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ 3p+a & 3q+b & 3r+c \\ 2p & 2q & 2r \end{vmatrix}$
b) $\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix}$

**درستی یا نادرستی روابط زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید:**

a) $\det(A+B) = \det A + \det B$
b) $\det A = \det(\text{RREF}(A))$
c) $\det(-A) = -\det A$
d) $\det(A^\top) = \det A$

اگر $\det A = 2 \,, \det B = -1 \,, \det C = 3$ حساب کنید:

a) $\begin{vmatrix} A & X & Y \\ 0 & B & 0 \\ 0 & Z & C \end{vmatrix}$
b) $\begin{vmatrix} A & X & 0 \\ 0 & B & 0 \\ Y & Z & C \end{vmatrix}$

**نشان دهید:**

$$\begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ b+x & c+x & a+x \\ c+x & a+x & b+x \end{vmatrix} = (a+b+c+3x)\left\{(ab+ac+bc)-(a^2+b^2+c^2)\right\}$$

**۶- $\operatorname{adj}(A)$ را بیابید:**

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$
b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

**۷- اگر $\det A = -1 \,, \det B = 2 \,, \det C = 3$ حساب کنید:**

a) $\det(A^3 B C^\top B^{-1})$
b) $\det(B^x C^{-1} A B^{-1} C^\top)$

**۸-** اگر $\det(2A^{-1}) = \det(A^3(B^{-1})^T) = -4$ ، $A_{3\times3}$

$\det A$ , $\det B$ را بیابید.

a) $\det(2B^{-1})$ where $B = \begin{bmatrix} 4u & 2a & -p \\ 4v & 2b & -q \\ 4w & 2c & -r \end{bmatrix}$

**۴-** اگر $\det A = 3$ , $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix}$

b) $\det(2C^{-1})$ where $C = \begin{bmatrix} 2p & -a+u & 3u \\ 2q & -b+v & 3v \\ 2r & -c+w & 3w \end{bmatrix}$

**۴-** با تعیین درستی یا نادرستی سیستم‌ها جواب‌ها را بیابید

a) $\begin{cases} 5x + y - z = -7 \\ 2x - y - 2z = 6 \\ 3x \quad\quad + 2z = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y + 3z = 1 \\ 6x + 2y - z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = -1 \end{cases}$

**۴-** $\det(A^{-1} + 4\,\text{adj}(A))$ را حساب کنید اگر $\det A = 2$ , $A_{3\times3}$

**۵-** ماتریس‌های زیر را از لحاظ معکوس‌پذیری بررسی نمایید

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$ $\lambda \neq \mu$

**۶-** با توجه به شرط داده شده $A^k$ را حساب کنید

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ , $v_0 = \{^1_2\}$ , $v_0 = \{^1_2\}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , $v_0 = \{^1_1\ _1\}$

**۷-** نشان دهید که ماتریس‌های $P^{-1}AP$ , $P^{-1}BP$

$AB = BA$

تمرینات درس هندسه تحلیلی و جبر خطی

۱. مطلوبست تعیین مختصات بردار $\overline{PQ}$ در هر حالت:

a) $P = (3, -1, 4)$ , $Q = (1, 0, -1)$

b) $P = (1, 1, 1)$ , $Q = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ ...

c) ...

$P_0 = (1, 2, 0)$

مطلوبست ۳ نقطه ...

۲. مطلوبست تعیین $C = (5, 2, -1)$ ... $B = (2, 0, 1)$ ، $A = (1, -1, 2)$

$||\overline{AC}|| = 2||\overline{BC}||$

۳. ... $C = (5, 2, -1)$ , $B = (3, 0, -1)$ , $A = (3, 1, -2)$

۴. معادله خط که از نقطه $Q$ ... $P = (3, 2, -1)$
$$\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-t \\ z = 3-2t \end{cases}$$

۵. معادله خط ... $P = (1, 1, 2)$
$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 4+t \\ z = t \end{cases}$$

۶. ... معادله خط ...
$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+5t \\ z = 3-t \end{cases}$$

۷. ... معادله صفحه ...

a) $x - 3y + 2z = 4$

b) $-x - 4y - 3z = 6$

$x - 3y + 2z = 4$ . $2x - y - z = 5$

۸. ... معادله صفحه ...
$$\begin{cases} x = 3+t \\ y = -2t \\ z = 2-t \end{cases}$$

$L_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1 \\ z = -1+t \end{cases}$ , $L_2: \begin{cases} x = 3+2s \\ y = 5 \\ z = 1-3s \end{cases}$

۹. ... معادله صفحه ...

۱۰.