تکلیف سری **اول** درس ریاضی پیشرفته مبحث حساب تغییرات

۱- اگر y دو مرتبه مشتق‌پذیر بوده و داشته باشیم $y(0)=0$ و $y(1)=1$، از میان کلیه توابع به فرم رابطه

$$y(x)=x+c_1x(1-x)+c_2x^2(1-x)$$

توابعی را بیابید که فاکشلزی را مینیمم ی‌کنند:

$$J(y)=\int_0^1(1+x)(y')^2dx$$

۲- برای فانکشنال زیر تغییرات مرتبه اول و دوم I را بیابید:

$$I(y)=\int_a^b\frac{1}{1+y^2}(y')^2dx$$

۳- مطلوبست محاسبه اکسترمم فانکشنال‌های زیر:

$$a)\ I=\int_{x_1}^{x_2}((y')^2+2y)dx$$

$$b)\ I=\int_{x_1}^{x_2}(x(y')^2-yy'+y)dx$$

$$c)\ I=\int_0^1(xy+y^2-2y^2y')dx\,,\quad y(0)=1\quad \&\quad y(1)=2$$

$$d)\ I=\int_0^1 yy'dx\,,\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=1$$

۴- با استفاده از تعریف اپراتور δ معادلات اویلر لاگرانژ را برای فانکشنال زیر بیابید:

$$J(y)=\int\left(y'^2+2xy+y^2\right)dx$$

۵- با استفاده از اپراتور δ معادلات اویلر لاگرانژ برای فانکشنالی بصورت زیر را بیابید:

$$J(y)=\int f(x,y,y',y'')dx$$

تکلیف سری **دوم** درس ریاضی پیشرفته مبحث حساب تغییرات

۱- مطلوبست محاسبه منحنی که به ازای آن فانکشنال

$$I = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$$

با شرط $y(0) = 0$ دارای اکسترمم باشد اگر:

الف) نقطه (x_1, y_1) روی خط $y = x - 5$ قرار داشته باشد.

ب) نقطه (x_1, y_1) روی دایره $(x-9)^2 + y^2 = 9$ قرار داشته باشد.

۲- مطلوبست اکسترمم فانکشنال زیر اگر $y(e)$ آزاد باشد:

$$J(y) = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2(y')^2 - \frac{1}{8}y^2\right) dx\,, \quad y(1) = 1$$

۳- منحنی $y(x)$ را بگونه‌ای بیابید که فانکشنال

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 y'^2 dx$$

تحت قید

$$K = \int_0^1 y dx = \frac{1}{6}$$

و شرایط مرزی

$$y(0) = 0, \;\; y(1) = 0$$

مینیمم گردد.