



دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته  
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

# تئوری تخمین

## ESTIMATION THEORY

نیم سال اول سال تحصیلی ۰۴-۰۵

# تخمین بدون بایاس کمترین واریانس

2

- معرفی
- تخمینگر بدون بایاس
- معیار کمترین واریانس
- وجود تخمینگر بدون بایاس کمترین واریانس
- پیدا کردن تخمینگر بدون بایاس کمترین واریانس

# تخمین بدون بایاس

3

□ تعریف تخمینگر بدون بایاس:

$$E(\hat{\theta}) = \theta \quad a < \theta < b$$

□ مثال:

$$x[n] = A + w[n] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

□ تخمینگر:

$$\hat{A} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

□ ارزیابی بدون بایاس بودن:

$$\begin{aligned} E(\hat{A}) &= E \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E(x[n]) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A \\ &= A \end{aligned}$$

# تخمین بدون بایاس

4

□ تخمینگر دیگر:

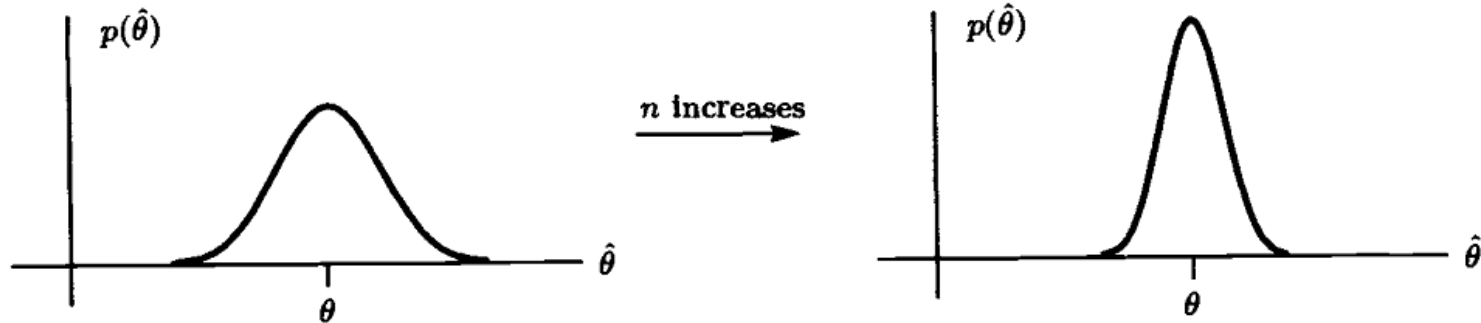
$$\check{A} = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n].$$

□ ارزیابی بدون بایاس بودن:

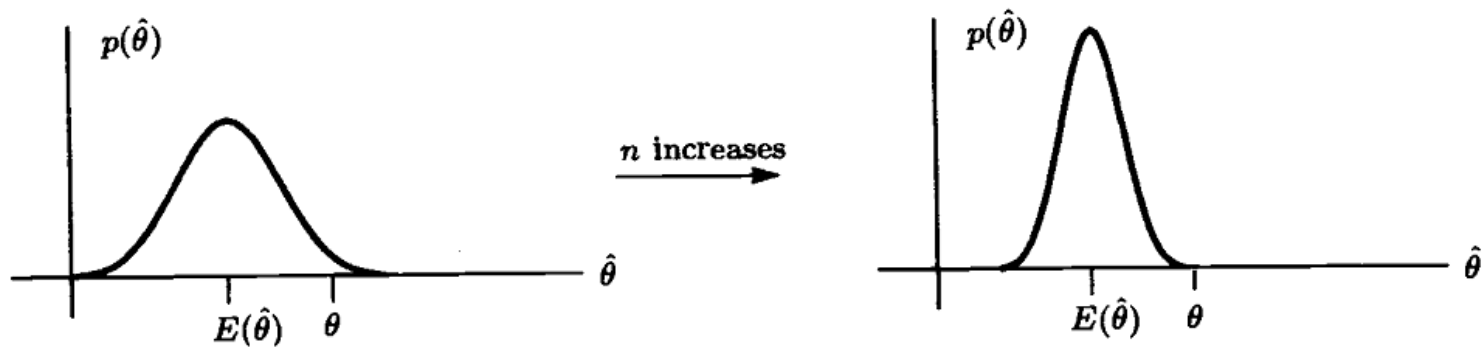
$$\begin{aligned} E(\check{A}) &= \frac{1}{2}A \\ &= A \text{ if } A = 0 \\ &\neq A \text{ if } A \neq 0. \end{aligned}$$

□ تعریف بایاس:

$$b(\theta) = E(\hat{\theta}) - \theta$$



(a) Unbiased estimator



(b) Biased estimator

# معیار کمینه واریانس

6

□ تعریف خطای میانگین مربعات:

*mean square error* (MSE), defined as

$$\text{mse}(\hat{\theta}) = E \left[ (\hat{\theta} - \theta)^2 \right].$$

□ بازنویسی رابطه:

$$\begin{aligned} \text{mse}(\hat{\theta}) &= E \left\{ \left[ (\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta) \right]^2 \right\} \\ &= \text{var}(\hat{\theta}) + \left[ E(\hat{\theta}) - \theta \right]^2 \\ &= \text{var}(\hat{\theta}) + b^2(\theta) \end{aligned}$$

# معیار کمینه واریانس

7

□ به عنوان مثال:

$$\check{A} = a \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

$$E(\check{A}) = aA$$

$$\text{var}(\check{A}) = a^2 \sigma^2 / N$$



$$\text{mse}(\check{A}) = \frac{a^2 \sigma^2}{N} + (a - 1)^2 A^2$$

$$\frac{d \text{mse}(\check{A})}{da} = \frac{2a \sigma^2}{N} + 2(a - 1) A^2$$

$$a_{\text{opt}} = \frac{A^2}{A^2 + \sigma^2 / N}.$$

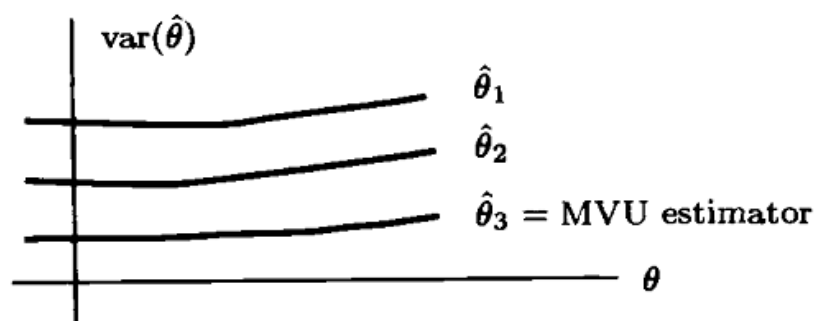
□ چون مقدار بهینه ضریب  $a$  به پارامتر نامعلوم  $A$  وابسته است، پس این تخمینگر کمینه  $\text{MSE}$  غیر قابل تحقق است.

# معیار کمینه واریانس

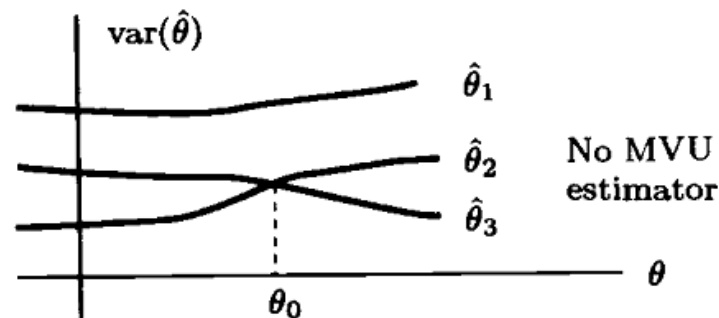
8

- ممکن است به طور اتفاقی برخی تخمینگرهای کمینه  $MSE$  قابل تحقق باشند.
- از دیدگاه عملی تحقق تخمینگر کمینه  $MSE$  باید نادیده گرفته شود.
- روش جایگزین این است که مقدار بایاس برابر با صفر قرار داده شده و تخمینگر کمینه واریانس دنبال شود.
- چنین تخمینگری تخمینگر بدون بایاس کمترین واریانس ( $MVUE$ ) نامیده می شود.
- توجه کنید که مقدار  $MSE$  در یک تخمینگر بدون بایاس همان واریانس است.

□ سوال: آیا همیشه تخمینگر بدون بایاس کمترین واریانس برای همه مقادیر  $\theta$  وجود دارد؟ جواب: خیر



(a)



(b)

□ مثال:

$$\begin{aligned}x[0] &\sim \mathcal{N}(\theta, 1) \\x[1] &\sim \begin{cases} \mathcal{N}(\theta, 1) & \text{if } \theta \geq 0 \\ \mathcal{N}(\theta, 2) & \text{if } \theta < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

□ دو تخمینگر بدون بایاس:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{2} (x[0] + x[1])$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{2}{3}x[0] + \frac{1}{3}x[1]$$

□ بررسی واریانس تخمینگرها:

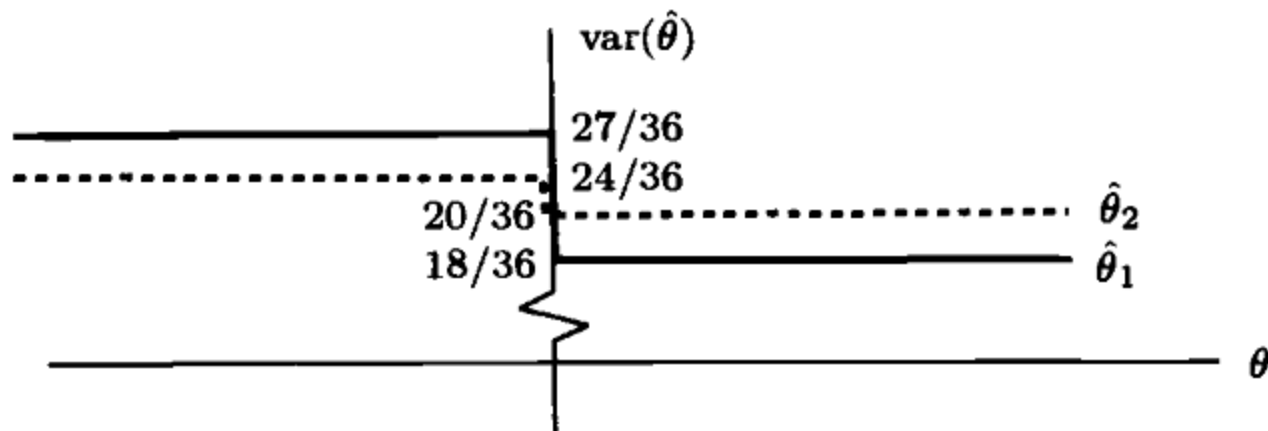
$$\text{var}(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{4} (\text{var}(x[0]) + \text{var}(x[1]))$$

$$\text{var}(\hat{\theta}_2) = \frac{4}{9}\text{var}(x[0]) + \frac{1}{9}\text{var}(x[1])$$

□ واریانس تخمینگرها:

$$\text{var}(\hat{\theta}_1) = \begin{cases} \frac{18}{36} & \text{if } \theta \geq 0 \\ \frac{27}{36} & \text{if } \theta < 0 \end{cases}$$

$$\text{var}(\hat{\theta}_2) = \begin{cases} \frac{20}{36} & \text{if } \theta \geq 0 \\ \frac{24}{36} & \text{if } \theta < 0. \end{cases}$$



□ بنابراین هیچکدام از تخمینگرها MVUE نیستند.

- اگر MVUE وجود داشته باشد، هیچ الگوریتم سراسری برای یافتن آن وجود ندارد.
- ما برای یافتن MVUE چند مرحله را طی می کنیم:
- یافتن حد کرامر-راو (CRLB) و بررسی اینکه آیا هیچ تخمینگری آن را برآورده می کند؟
- کاربرد قضیه RBLS : به کمک این قضیه و به شرط محدودیت هایی روی PDF آمارگان، می توان به MVUE رسید.
- تخمینگرها را علاوه بر بدون بایاس بودن به «خطی بودن» نیز محدود کرد و سپس بهترین تخمینگر خطی را یافت.

# تعمیم به حالت برداری

13

□ پارامتر تخمین می تواند یک بردار (چندین پارامتر) باشد:

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_p]^T$$

□ تعریف تخمینگر برداری:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2 \ \dots \ \hat{\theta}_p]^T$$

□ شرط بدون بایاس بودن:

$$E(\hat{\theta}_i) = \theta_i \quad a_i < \theta_i < b_i$$

□ شرط کمترین واریانس:

$$\text{var}(\hat{\theta}_i) \text{ for } i = 1, 2, \dots, p \text{ is minimum}$$