



دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته  
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

# تئوری تخمین

## ESTIMATION THEORY

نیم سال اول سال تحصیلی ۰۴-۰۵

# روش ممان ها

2

- مقدمه
- تعریف ممان
- روش تخمین با استفاده از ممان
- حالت برداری (چند پارامتری)

- این تخمین، تخمین ساده ای است که هیچ معیار بهینگی ندارد، اما در حالت  $N$  بزرگ کارایی خوبی دارد.
- از این تخمین می توان به عنوان یک حدس اولیه در حل عددی تخمین های دیگر (مثلاً  $MLE$ ) استفاده کرد.
- در این تخمین لزوماً نیازی به دانستن  $pdf$  داده نیست، اما باید رابطه پارامتر مجهول با ممان های مختلف داده معلوم باشد.
- اساس این روش، تخمین ممان های داده است. سپس با استفاده از این ممان ها و معلوم بودن رابطه آنها با پارامتر مجهول، به تخمین پارامتر می پردازیم.

□ تعریف ممان های مرتبه مختلف:

$$\mu_k = E(x^k[n])$$

□ تخمین ممان های داده:

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^k[n]$$

□ حال اگر رابطه پارامتر مجهول با ممان های داده معلوم باشد، با استفاده از تخمین ممان، می توان پارامتر مجهول را نیز تخمین زد.

□ در تخمین پارامتر هرچه از ممان های مرتبه پایین تر استفاده کنیم بهتر است، چون با بالارفتن مرتبه ممان، واریانس تخمین آن هم بالا می رود.

# تخمین با استفاده از ممان

5

□ مثال ۱. ولتاژ DC در نویز گوسی

$$x[n] = A + w[n] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

□ هدف تخمین  $A$  است. بنابراین باید رابطه  $A$  و ممان های  $x[n]$  را پیدا کنیم.

$$\mu_1 = E(x[n]) = A. \quad \square \text{ می دانیم:}$$

□ لذا برای تخمین  $A$  کافی است ممان اول را تخمین بزنیم:

$$\hat{A} = \hat{\mu}_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

# تخمین با استفاده از ممان

6

□ مثال ۲. ولتاژ DC در نویز گوسی و تخمین واریانس نویز

$$x[n] = A + w[n] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

□ هدف تخمین واریانس نویز است. باید رابطه واریانس نویز و ممان ها را به دست آوریم. می دانیم:

$$\mu_1 = A$$

$$\mu_2 = \sigma^2 + \mu_1^2$$

□ بنابراین در تخمین واریانس خواهیم داشت:

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] - \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \right)^2$$

# تخمین با استفاده از ممان

7

□ مثال ۳. فرض کنید نمونه های IID از یک داده با pdf نمایی را در اختیار داریم:

$$p(x[n]; \lambda) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x[n]) & x[n] > 0 \\ 0 & x[n] < 0. \end{cases}$$

□ هدف، تخمین پارامتر  $\lambda$  است.

□ ممان اول داده را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} \mu_1 = E(x[n]) &= \int_0^{\infty} x[n] \lambda \exp(-\lambda x[n]) dx[n] \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \xi \exp(-\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

# تخمین با استفاده از ممان

8

□ مثال ۳. ادامه

□ حال که رابطه ممان اول با پارامتر مجهول ( $\lambda$ ) مشخص شد، به راحتی می توان آن را تخمین زد:

$$\lambda = \frac{1}{\mu_1} \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]}.$$

□ در این حالت می خواهیم  $p$  پارامتر مجهول را تخمین بزنیم، لذا باید رابطه  $p$  ممان با این  $p$  پارامتر معلوم باشد تا بتوان آنها را تخمین زد:

$$\mu_1 = h_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$$

$$\mu_2 = h_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\mu_p = h_p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$$

□ با بیان برداری:  $\mu = \mathbf{h}(\theta)$ .

□ برای تخمین بردار  $\theta$  باید از رابطه معکوس استفاده کرد:

$$\theta = \mathbf{h}^{-1}(\mu) \quad \longrightarrow \quad \hat{\theta} = \mathbf{h}^{-1}(\hat{\mu})$$

□ ضمنا در تخمین بردار ممان داریم:

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^p[n] \end{bmatrix}.$$

□ مثال ۴. تخمین پارامترهای مدل گوسی مخلوط

$$p(x[n]; \epsilon) = \frac{1 - \epsilon}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2[n]}{\sigma_1^2}\right) + \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2[n]}{\sigma_2^2}\right)$$

□ همانطور که مشاهده می شود، داده ترکیب خطی دو گوسی با میانگین صفر و واریانس های متفاوت است. وزن ترکیب  $\epsilon$  و  $1-\epsilon$  است.

□ مثال ۴. ادامه

□ هدف تخمین واریانس ها و نیز وزن ترکیب ( $\epsilon$ ) است.

□ به محاسبه ممان ها می پردازیم. از آنجا که تابع pdf یک تابع زوج است، ممان های فرد همگی صفر هستند، لذا سه ممان زوج اول را محاسبه می کنیم:

$$\mu_2 = E(x^2[n]) = (1 - \epsilon)\sigma_1^2 + \epsilon\sigma_2^2$$

$$\mu_4 = E(x^4[n]) = 3(1 - \epsilon)\sigma_1^4 + 3\epsilon\sigma_2^4$$

$$\mu_6 = E(x^6[n]) = 15(1 - \epsilon)\sigma_1^6 + 15\epsilon\sigma_2^6.$$

□ در اینجا در واقع یک دستگاه معادلات داریم که باید مقدار  $\sigma_1^2$ ،  $\sigma_2^2$  و  $\epsilon$  را تخمین بزنیم.

□ مثال ۴. ادامه

□ به دلیل غیر خطی بودن معادلات، می توان از روش های عددی استفاده کرد. ضمناً می توان تبدیل پارامتر زیر را به کار برد:

$$\begin{aligned} u &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ v &= \sigma_1^2 \sigma_2^2. \end{aligned}$$

□ در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\mu_6 - 5\mu_4\mu_2}{5\mu_4 - 15\mu_2^2} \\ v &= \mu_2 u - \frac{\mu_4}{3}. \end{aligned}$$

□ پس از محاسبه  $u$ ، مقدار  $v$  محاسبه می شود. سپس می توان مقدار واریانس ها را به دست آورد:

□ مثال ۴. ادامه

$$\sigma_1^2 = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4v}}{2}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{v}{\sigma_1^2}$$

□ در نهایت:

$$\epsilon = \frac{\mu_2 - \sigma_1^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}.$$

□ باید توجه نمود رابطه بالا با استفاده از محاسبه زیر حاصل شده است:

$$\begin{aligned} E(x^2[n]) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2[n] [(1 - \epsilon)\phi_1(x[n]) + \epsilon\phi_2(x[n])] dx[n] \\ &= (1 - \epsilon)\sigma_1^2 + \epsilon\sigma_2^2 \end{aligned}$$

□ که:

$$\phi_i(x[n]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2[n]}{\sigma_i^2}\right)$$