



دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تئوری تخمین

ESTIMATION THEORY

نیم سال اول سال تحصیلی ۰۴-۰۵

- مقدمه
- فرایند گوس-مارکوف
- حالت برداری فرایند گوس-مارکوف
- فیلتر کالمن
- ویژگی های فیلتر کالمن
- فیلتر کالمن برداری
- فیلتر کالمن تعمیم یافته

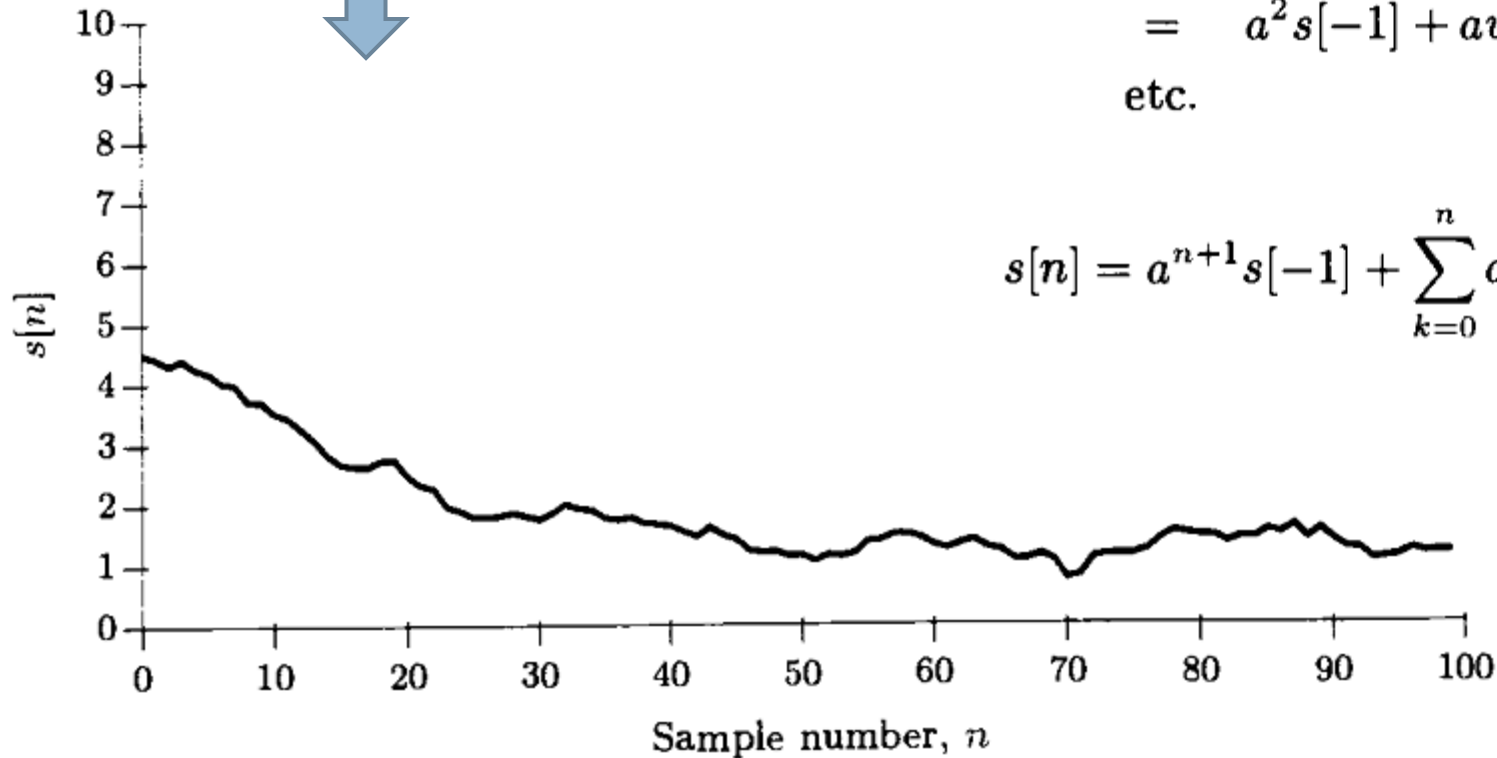
- فیلتر کالمن را می توان یک تخمینگر $MMSE$ متوالی از سیگنال آغشته به نویز در نظر گرفت، به طوری که سیگنال با یک مدل پویا (دینامیک) یا معادله حالت مدل می شود.
- این فیلتر را می توان تعمیم $MMSE$ متوالی بخش قبل در نظر گرفت که پارامترهای مجهول می توانند با یک مدل پویا (دینامیک) در زمان ظاهر شوند.
- اگر سیگنال و نویز مشترکاً گوسی باشند، فیلتر کالمن همان $MMSE$ متوالی بهینه است، و در غیر این صورت $LMMSE$ متوالی بهینه خواهد بود.

$$s[n] = as[n-1] + u[n] \quad n \geq 0$$

where $u[n]$ is WGN with variance σ_u^2 , $s[-1] \sim \mathcal{N}(\mu_s, \sigma_s^2)$, and $s[-1]$ is independent of $u[n]$ for all $n \geq 0$.

- به $u[n]$ نویز تحریک (ورودی تحریک) گفته می شود. خروجی (حالت) سیستم در زمان n به حالت قبلی سیستم و ورودی در زمان n بستگی دارد.
- در تئوری کنترل به این مدل، مدل حالت (state model) یا مدل پویا (dynamic model) گفته می شود.
- در صورتی که $a < 1$ باشد، اثر شرایط اولیه در n بزرگ قابل چشم پوشی است.

for $a = 0.98$, $\sigma_u^2 = 0.1$, $\mu_s = 5$, $\sigma_s^2 = 1$.



$$\begin{aligned} s[0] &= as[-1] + u[0] \\ s[1] &= as[0] + u[1] \\ &= a^2s[-1] + au[0] + u[1] \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

$$s[n] = a^{n+1}s[-1] + \sum_{k=0}^n a^k u[n-k]$$

Figure 13.2 Typical realization of first order Gauss-Markov process

□ میانگین و واریانس تخمین:

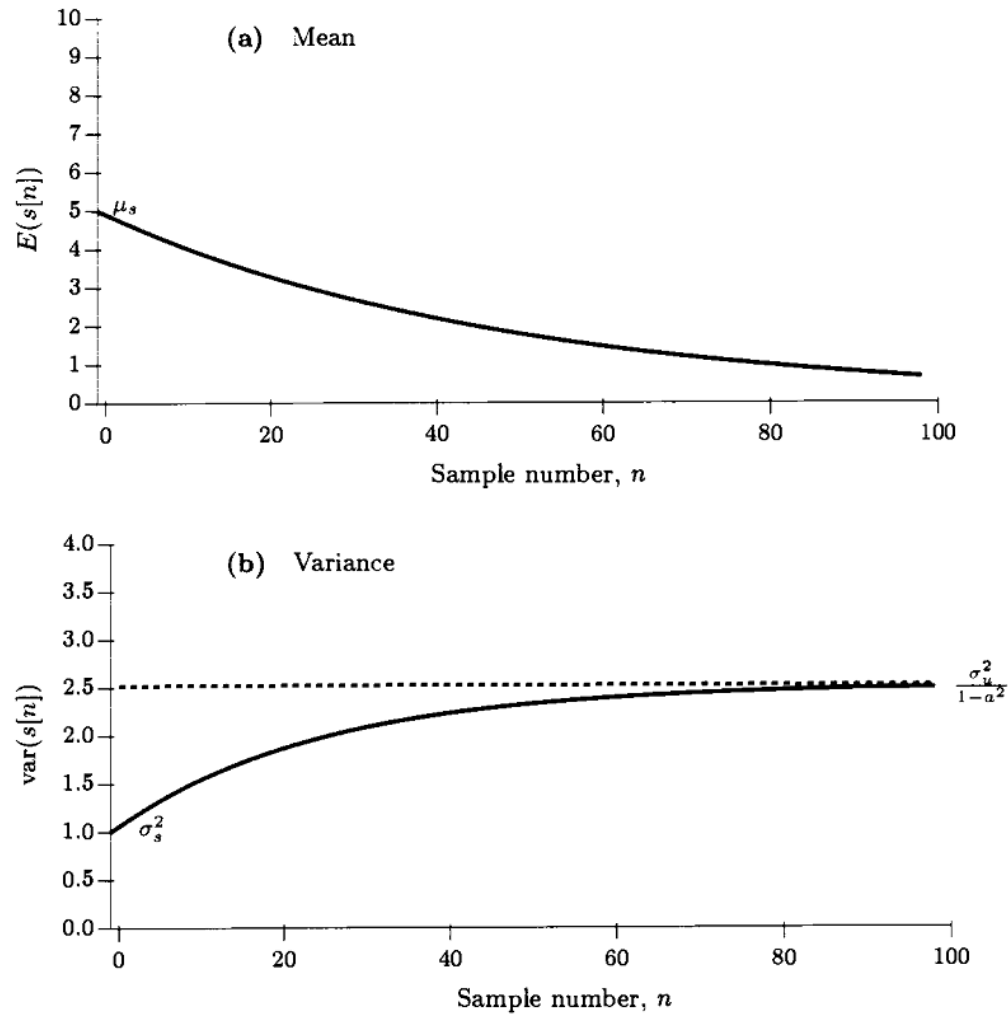
$$E(s[n]) = aE(s[n-1]) + E(u[n])$$

$$E(s[n]) = aE(s[n-1])$$

$$\begin{aligned} \text{var}(s[n]) &= E[(s[n] - E(s[n]))^2] \\ &= E[(as[n-1] + u[n] - aE(s[n-1]))^2] \\ &= a^2 \text{var}(s[n-1]) + \sigma_u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(s[n]) &= a^{n+1}E(s[-1]) \\ &= a^{n+1}\mu_s. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var}(s[n]) &= c_s[n, n] \\ &= a^{2n+2}\sigma_s^2 + \sigma_u^2 \sum_{k=0}^n a^{2k}. \end{aligned}$$



Theorem 13.1 (Vector Gauss-Markov Model) *The Gauss-Markov model for a $p \times 1$ vector signal $s[n]$ is*

$$s[n] = \mathbf{A}s[n-1] + \mathbf{B}u[n] \quad n \geq 0. \quad (13.21)$$

The $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ are known matrices having dimensions $p \times p$ and $p \times r$, respectively, and it is assumed that the eigenvalues of $\mathbf{A}$ are less than 1 in magnitude. The driving noise vector $u[n]$ has dimension $r \times 1$ and is vector WGN or $u[n] \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$ with the $u[n]$'s independent. The initial condition $s[-1]$ is a $p \times 1$ random vector distributed according to $s[-1] \sim \mathcal{N}(\mu_s, \mathbf{C}_s)$ and is independent of the $u[n]$'s. Then, the signal process is Gaussian with mean

$$E(s[n]) = \mathbf{A}^{n+1} \mu_s \quad (13.22)$$

and covariance for $m \geq n$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_s[m, n] &= E[(s[m] - E(s[m]))(s[n] - E(s[n]))^T] \\ &= \mathbf{A}^{m+1} \mathbf{C}_s \mathbf{A}^{n+1^T} + \sum_{k=m-n}^m \mathbf{A}^k \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{n-m+k^T} \end{aligned} \quad (13.23)$$

حالت برداری مدل گوس-مارکوف

9

and for $m < n$

$$\mathbf{C}_s[m, n] = \mathbf{C}_s^T[n, m]$$

and covariance matrix

$$\mathbf{C}[n] = \mathbf{C}_s[n, n] = \mathbf{A}^{n+1} \mathbf{C}_s \mathbf{A}^{n+1^T} + \sum_{k=0}^n \mathbf{A}^k \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{k^T}. \quad (13.24)$$

The mean and covariance propagation equations are

$$E(\mathbf{s}[n]) = \mathbf{A} E(\mathbf{s}[n-1]) \quad (13.25)$$

$$\mathbf{C}[n] = \mathbf{A} \mathbf{C}[n-1] \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{B}^T. \quad (13.26)$$

□ در مسائل فیلتر کالمن، مشاهداتی (همراه با نویز) از حالت سیستم داریم و می خواهیم حالت را تخمین بزنیم:

$$s[n] = as[n-1] + u[n]$$

$$x[n] = s[n] + w[n]$$

□ در مورد حالت (state) و مشاهدات، چند حالت را می توان متصور شد:

1. scalar state – scalar observation ($s[n-1], x[n]$)
2. vector state – scalar observation ($s[n-1], x[n]$)
3. vector state – vector observation ($s[n-1], \mathbf{x}[n]$).

□ حالت اول:

$$\begin{aligned} s[n] &= as[n-1] + u[n] \\ x[n] &= s[n] + w[n] \end{aligned} \quad (13.27)$$

where $u[n]$ is zero mean Gaussian noise with independent samples and $E(u^2[n]) = \sigma_u^2$, $w[n]$ is zero mean Gaussian noise with independent samples and $E(w^2[n]) = \sigma_n^2$. We further assume that $s[-1]$, $u[n]$, and $w[n]$ are all independent. Finally, we assume that $s[-1] \sim \mathcal{N}(\mu_s, \sigma_s^2)$. The noise process $w[n]$ differs from WGN only in that its variance is allowed to change with time. To simplify the derivation we will assume that $\mu_s = 0$, so that according to (13.4) $E(s[n]) = 0$ for $n \geq 0$. Later we will account for a nonzero initial signal mean. We wish to estimate $s[n]$ based on the observations $\{x[0], x[1], \dots, x[n]\}$ or to filter $x[n]$ to produce $\hat{s}[n]$.

□ تعریف: $\hat{s}[n|m]$ یعنی تخمین $s[n]$ با توجه به مشاهده $\{x[0], x[1], \dots, x[m]\}$

□ با توجه به تخمین MMSE:

$$\hat{s}[n|n] = E(s[n]|x[0], x[1], \dots, x[n]).$$

□ خلاصه روند فیلتر کالمن:

□ ۱- در ابتدا با توجه به تخمین حالت قبل، یک پیش بینی (prediction) از تخمین حالت فعلی به دست می آید. این تخمین بدون مشاهده فعلی صورت می گیرد و تنها یک پیش بینی است:

$$\hat{s}[n|n-1] = a\hat{s}[n-1|n-1].$$

□ ۲- سپس MSE کمینه این پیش بینی محاسبه می شود:

$$M[n|n-1] = a^2 M[n-1|n-1] + \sigma_u^2.$$

□ ۳- بهره کالمن در تخمین حالت فعلی (با استفاده از مشاهده فعلی)

محاسبه می شود:

$$K[n] = \frac{M[n|n-1]}{\sigma_n^2 + M[n|n-1]}.$$

□ ۴- با استفاده از پیش بینی و مشاهده فعلی، تخمین اصلاح می شود:

$$\hat{s}[n|n] = \hat{s}[n|n-1] + K[n](x[n] - \hat{s}[n|n-1]).$$

□ ۵- در نهایت کمینه MSE محاسبه می شود:

$$M[n|n] = (1 - K[n])M[n|n-1].$$

□ این مراحل برای حالت بعد تکرار می شود.

□ مثال ۱.

The signal model is a first-order Gauss-Markov process

$$s[n] = \frac{1}{2}s[n-1] + u[n] \quad n \geq 0$$

where $s[-1] \sim \mathcal{N}(0, 1)$ and $\sigma_u^2 = 2$. We assume that the signal is observed in noise $w[n]$, so that the data are $x[n] = s[n] + w[n]$, where $w[n]$ is zero mean Gaussian noise with independent samples, a variance of $\sigma_n^2 = (1/2)^n$, and independent of $s[-1]$ and $u[n]$ for $n \geq 0$.

□ حالت و MSE اولیه:

$$\begin{aligned}\hat{s}[-1|-1] &= E(s[-1]) = 0 \\ M[-1|-1] &= E[(s[-1] - \hat{s}[-1|-1])^2] \\ &= E(s^2[-1]) = 1.\end{aligned}$$

□ مثال ۱. ادامه

□ پیش بینی حالت بعد و MSE آن:

$$\begin{aligned}\hat{s}[0|-1] &= a\hat{s}[-1|-1] \\ &= \frac{1}{2}(0) = 0 \\ M[0|-1] &= a^2M[-1|-1] + \sigma_u^2 \\ &= \frac{1}{4}(1) + 2 = \frac{9}{4}.\end{aligned}$$

□ محاسبه بهره کالمن:

$$\begin{aligned}K[0] &= \frac{M[0|-1]}{\sigma_0^2 + M[0|-1]} \\ &= \frac{\frac{9}{4}}{1 + \frac{9}{4}} = \frac{9}{13}\end{aligned}$$

□ مثال ۱. ادامه

□ اصلاح تخمین با استفاده از مشاهده و MSE آن:

$$\begin{aligned}\hat{s}[0|0] &= \hat{s}[0|-1] + K[0](x[0] - \hat{s}[0|-1]) \\ &= 0 + \frac{9}{13}(x[0] - 0) = \frac{9}{13}x[0].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M[0|0] &= (1 - K[0])M[0|-1] \\ &= \left(1 - \frac{9}{13}\right) \frac{9}{4} = \frac{9}{13}.\end{aligned}$$

□ همین مراحل (پیش بینی و MSE آن، محاسبه بهره کالمن، اصلاح تخمین با استفاده از مشاهده و MSE آن) برای حالت بعد ($n=1$) تکرار می شود.

□ مثال ۱. ادامه

$$\begin{aligned}\hat{s}[1|0] &= \frac{9}{26}x[0] \\ M[1|0] &= \frac{113}{52} \\ K[1] &= \frac{113}{129} \\ \hat{s}[1|1] &= \frac{9}{26}x[0] + \frac{113}{129} \left(x[1] - \frac{9}{26}x[0] \right) \\ M[1|1] &= \frac{452}{1677}\end{aligned}$$

□ باید توجه نمود که همین نتایج با فرض صفر نبودن μ_s به دست می آید. در این حالت خواهیم داشت:

$$E(s[n]) = a^{n+1}E(s[-1])$$

ویژگی های فیلتر کالمن

18

□ برخی ویژگی های فیلتر کالمن:

□ فیلتر کالمن تخمین MMSE متوالی فصل قبل را برای پارامتر تغییر یابنده در زمان (حالت) تعمیم می دهد.

□ هیچ محاسبه معکوس ماتریس در فیلتر کالمن نداریم، در صورتی که در روش غیر متوالی داشتیم:

$$\hat{\theta} = \mathbf{C}_{\theta x} \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{x}$$

□ فیلتر کالمن یک **فیلتر متغیر با زمان** است.

$$\begin{aligned}\hat{s}[n|n] &= a\hat{s}[n-1|n-1] + K[n](x[n] - a\hat{s}[n-1|n-1]) \\ &= a(1 - K[n])\hat{s}[n-1|n-1] + K[n]x[n].\end{aligned}$$

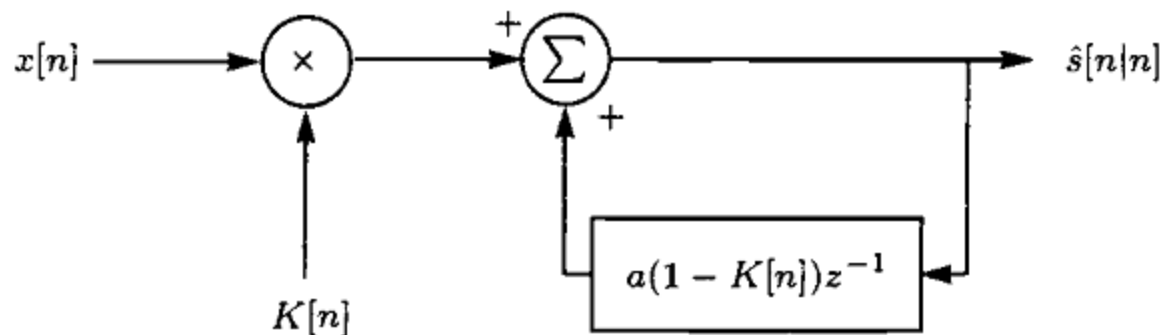
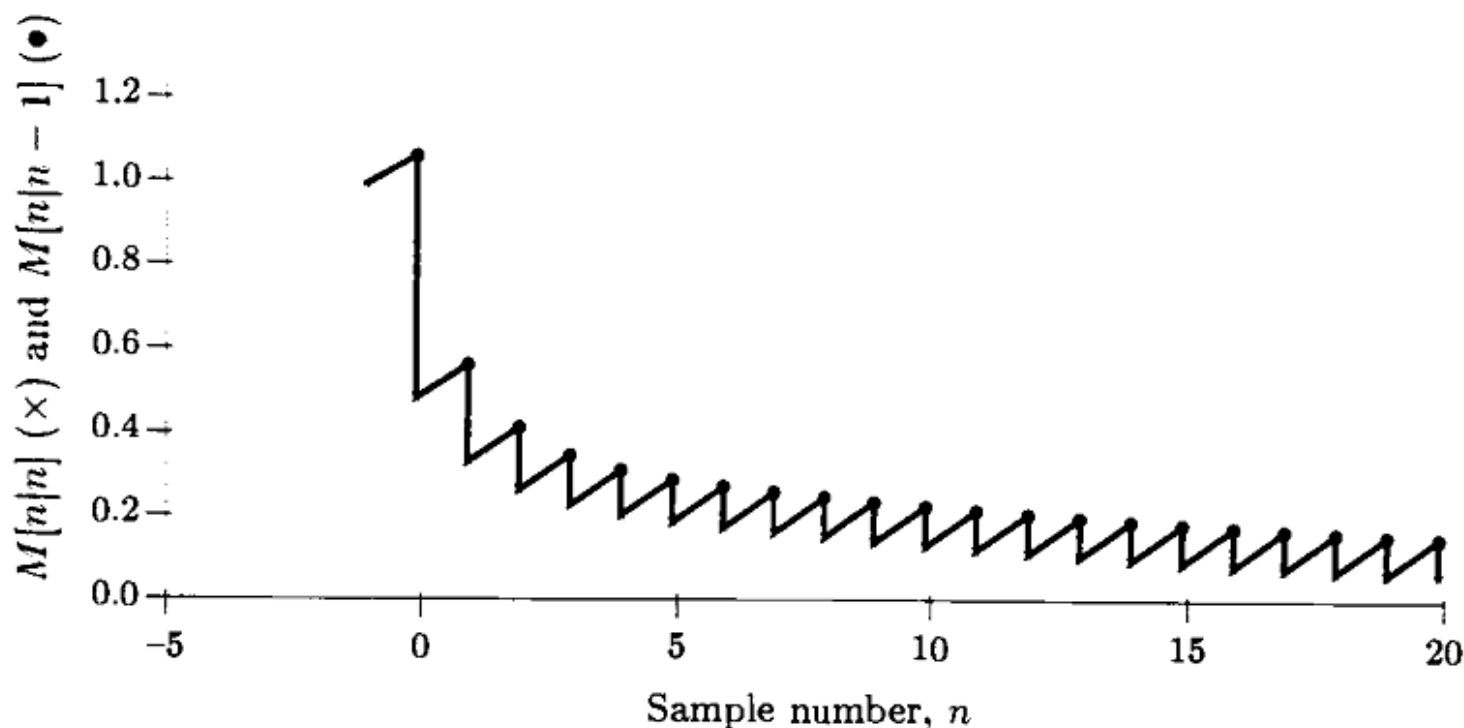


Figure 13.6 Kalman filter as time varying filter

❑ خطای MSE می تواند به صورت آفلاین محاسبه شود، چون به ورودی بستگی ندارد.

❑ مرحله پیش بینی خطا را افزایش می دهد، ولی مرحله اصلاح، خطا را کاهش می دهد.



$$a = 0.99, \sigma_u^2 = 0.1, \sigma_n^2 = 0.9^{n+1}, \text{ and } M[-1|-1] = 1.$$

□ فیلتر کالمن از نظر کمینه کردن MSE بیز بهینه است. اگر فرض گوسی بودن برقرار نباشد، فیلتر کالمن همان LMMSE بهینه است.

حالت برداری فیلتر کالمن

21

$$s[n] = \mathbf{A}s[n-1] + \mathbf{B}u[n] \quad n \geq 0$$

where $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ are known $p \times p$ and $p \times r$ matrices, $u[n]$ is vector WGN with $u[n] \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$, $s[-1] \sim \mathcal{N}(\mu_s, \mathbf{C}_s)$, and $s[-1]$ is independent of the $u[n]$'s.

□ مدل داده $\mathbf{x}$ همان مدل خطی $\mathbf{x} = \mathbf{H}\theta + w$ است:

$$x[n] = \mathbf{h}^T[n]s[n] + w[n]$$

where $\mathbf{h}[n]$ is a known $p \times 1$ vector and $w[n]$ is zero mean Gaussian noise with uncorrelated samples, with variance σ_n^2 , and also independent of $s[-1]$ and $u[n]$.

حالت برداری فیلتر کالمن

22

□ مراحل فیلتر کالمن برداری:

Prediction:

$$\hat{\mathbf{s}}[n|n-1] = \mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}[n-1|n-1].$$

Minimum Prediction MSE Matrix ($p \times p$):

$$\mathbf{M}[n|n-1] = \mathbf{A}\mathbf{M}[n-1|n-1]\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^T.$$

Kalman Gain Vector ($p \times 1$):

$$\mathbf{K}[n] = \frac{\mathbf{M}[n|n-1]\mathbf{h}[n]}{\sigma_n^2 + \mathbf{h}^T[n]\mathbf{M}[n|n-1]\mathbf{h}[n]}.$$

Correction:

$$\hat{\mathbf{s}}[n|n] = \hat{\mathbf{s}}[n|n-1] + \mathbf{K}[n](x[n] - \mathbf{h}^T[n]\hat{\mathbf{s}}[n|n-1]).$$

Minimum MSE Matrix ($p \times p$):

$$\mathbf{M}[n|n] = (\mathbf{I} - \mathbf{K}[n]\mathbf{h}^T[n])\mathbf{M}[n|n-1]$$

where the mean square error matrices are defined as

$$\begin{aligned}\mathbf{M}[n|n] &= E[(s[n] - \hat{s}[n|n])(s[n] - \hat{s}[n|n])^T] \\ \mathbf{M}[n|n-1] &= E[(s[n] - \hat{s}[n|n-1])(s[n] - \hat{s}[n|n-1])^T].\end{aligned}$$

To initialize the equations we use $\hat{s}[-1|-1] = E(s[-1]) = \mu_s$ and $\mathbf{M}[-1|-1] = \mathbf{C}_s$.

فیلتر کالمن تعمیم یافته

24

□ گاه رابطه حالت و/یا رابطه داده خطی نیست، یعنی به جای رابطه زیر:

$$\mathbf{s}[n] = \mathbf{A}\mathbf{s}[n-1] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n]$$

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{H}[n]\mathbf{s}[n] + \mathbf{w}[n]$$

□ این رابطه را داریم:

$$s[n] = a(s[n-1]) + Bu[n]$$

$$x[n] = h(s[n]) + w[n]$$

□ در اینجا معمولاً از یک تقریب خطی استفاده می کنند، به طوری که

با تعریف دو ماتریس **Jacobian** زیر، روابط به همان روابط خطی

قبل تبدیل می شود:

$$\mathbf{A}[n-1] = \left. \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s[n-1]} \right|_{s[n-1] = \hat{s}[n-1|n-1]}$$

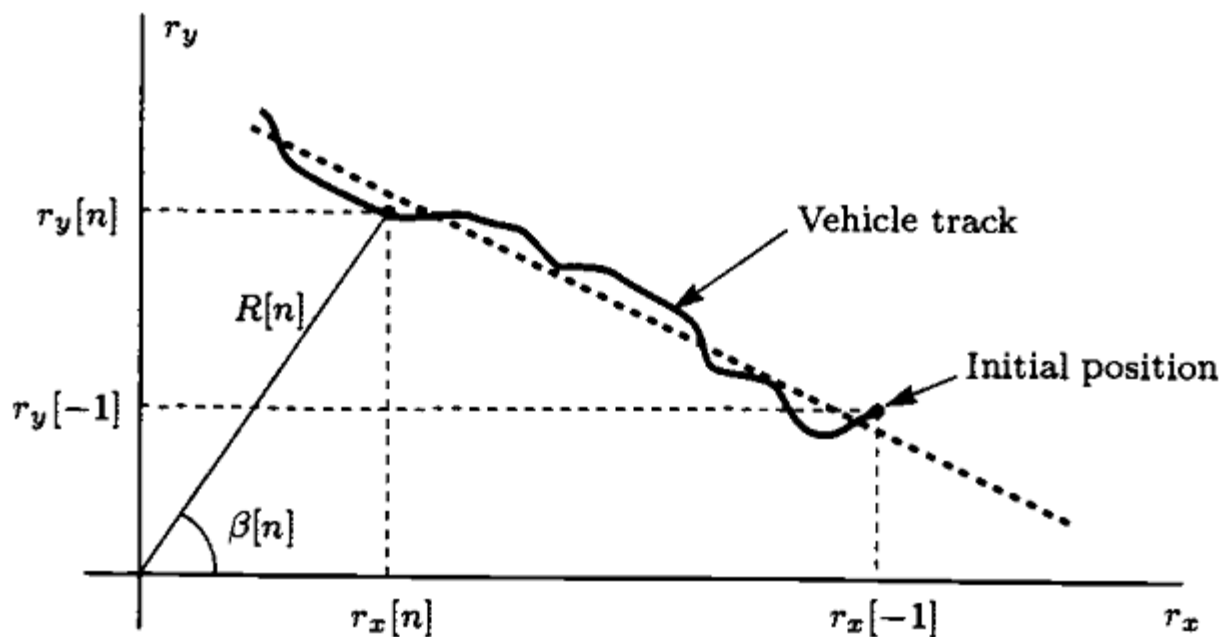
$$\mathbf{H}[n] = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s[n]} \right|_{s[n] = \hat{s}[n|n-1]}$$

فیلتر کالمن تعمیم یافته

25

□ مثال ۲. ردیابی شیء متحرک

□ در این مثال، هدف ردیابی مکان و سرعت یک شیء متحرک با اندازه گیری برد و زاویه دید آن هدف می باشد.



فیلتر کالمن تعمیم یافته

26

□ مثال ۲. ادامه

□ فرض کنیم معادلات سرعت به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}v_x[n] &= v_x[n-1] + u_x[n] \\v_y[n] &= v_y[n-1] + u_y[n].\end{aligned}$$

□ بنابراین معادلات مکان به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}r_x[n] &= r_x[n-1] + v_x[n-1]\Delta \\r_y[n] &= r_y[n-1] + v_y[n-1]\Delta\end{aligned}$$

□ بردار حالت مورد نظر شامل سرعت و مکان متحرک در هر لحظه است:

$$\mathbf{s}[n] = \begin{bmatrix} r_x[n] \\ r_y[n] \\ v_x[n] \\ v_y[n] \end{bmatrix}$$

فیلتر کالمن تعمیم یافته

27

□ مثال ۲. ادامه

□ معادله حالت:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_x[n] \\ r_y[n] \\ v_x[n] \\ v_y[n] \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}[n]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} r_x[n-1] \\ r_y[n-1] \\ v_x[n-1] \\ v_y[n-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}[n-1]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_x[n] \\ u_y[n] \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}[n]}.$$

□ مشاهدات (داده):

$$\begin{aligned} \hat{R}[n] &= R[n] + w_R[n] \\ \hat{\beta}[n] &= \beta[n] + w_\beta[n]. \end{aligned}$$

□ در واقع داریم:

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{h}(s[n]) + \mathbf{w}[n]$$

فیلتر کالمن تعمیم یافته

28

□ مثال ۲. ادامه

□ که:

$$\mathbf{h}(s[n]) = \begin{bmatrix} \sqrt{r_x^2[n] + r_y^2[n]} \\ \arctan \frac{r_y[n]}{r_x[n]} \end{bmatrix}.$$

□ برای خطی سازی رابطه داریم:

$$\mathbf{H}[n] = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s[n]} \right|_{s[n] = \hat{s}[n|n-1]}$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s[n]} = \begin{bmatrix} \frac{r_x[n]}{R[n]} & \frac{r_y[n]}{R[n]} & 0 & 0 \\ \frac{-r_y[n]}{R^2[n]} & \frac{r_x[n]}{R^2[n]} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□ مثال ۲. ادامه

□ روند کار:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{s}}[n|n-1] &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}[n-1|n-1] \\
 \mathbf{M}[n|n-1] &= \mathbf{A}\mathbf{M}[n-1|n-1]\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \\
 \mathbf{K}[n] &= \mathbf{M}[n|n-1]\mathbf{H}^T[n] (\mathbf{C} + \mathbf{H}[n]\mathbf{M}[n|n-1]\mathbf{H}^T[n])^{-1} \\
 \hat{\mathbf{s}}[n|n] &= \hat{\mathbf{s}}[n|n-1] + \mathbf{K}[n](\mathbf{x}[n] - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}[n|n-1])) \\
 \mathbf{M}[n|n] &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}[n]\mathbf{H}[n])\mathbf{M}[n|n-1]
 \end{aligned}$$

□ که:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فیلتر کالمن تعمیم یافته

30

□ مثال ۲. ادامه

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_u^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} \hat{R}[n] \\ \hat{\beta}[n] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}[n] = \begin{bmatrix} \frac{r_x[n]}{\sqrt{r_x^2[n] + r_y^2[n]}} & \frac{r_y[n]}{\sqrt{r_x^2[n] + r_y^2[n]}} & 0 & 0 \\ \frac{-r_y[n]}{r_x^2[n] + r_y^2[n]} & \frac{r_x[n]}{r_x^2[n] + r_y^2[n]} & 0 & 0 \end{bmatrix} \bigg|_{\mathbf{s}[n] = \hat{\mathbf{s}}[n|n-1]}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_R^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix}$$

□ مثال ۲. ادامه

□ مثال عددی در کتاب

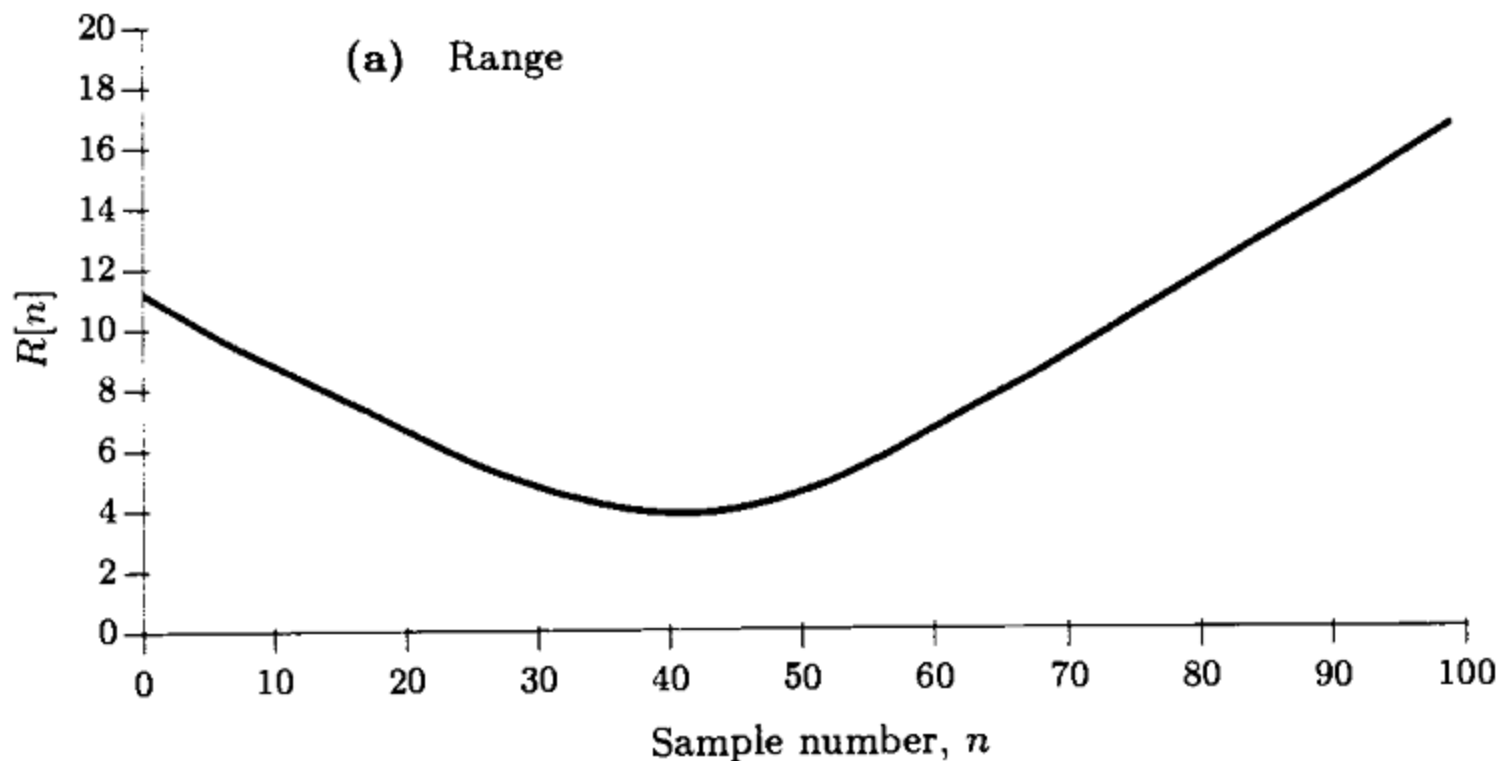
$$\begin{aligned}r_x[n] &= 10 - 0.2n \\r_y[n] &= -5 + 0.2n\end{aligned}$$

for $n = 0, 1, \dots, 100$, where we have assumed $\Delta = 1$ for convenience. From (13.75) this trajectory assumes $v_x = -0.2, v_y = 0.2$. To accommodate a more realistic vehicle track we introduce driving or plant noise, so that the vehicle state is described by (13.76) with a driving noise variance of $\sigma_u^2 = 0.0001$. With an initial state of

$$s[-1] = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ -0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad (13.78)$$

□ مثال ۲. ادامه

□ حرکت واقعی:

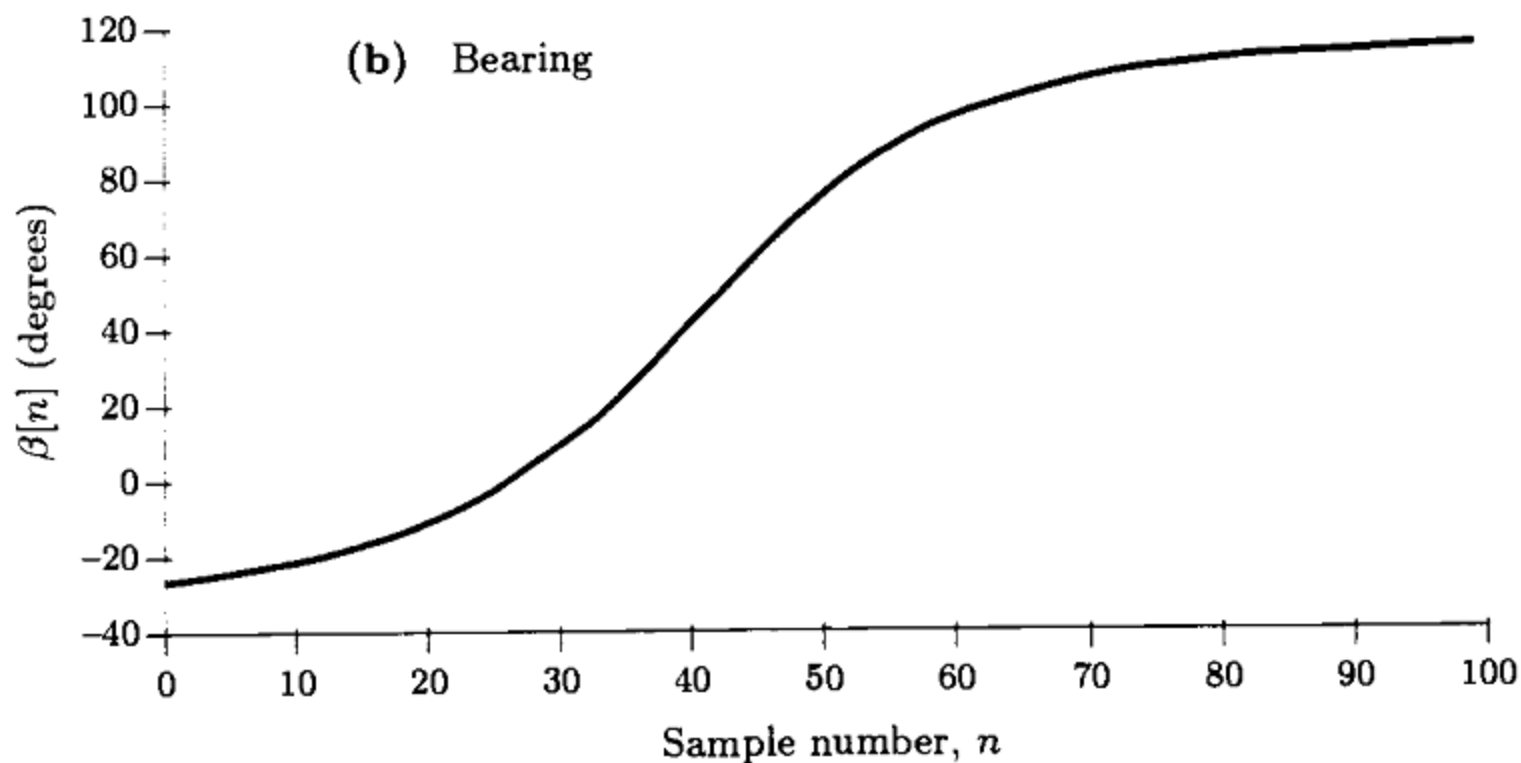


فیلتر کالمن تعمیم یافته

33

□ مثال ۲. ادامه

□ حرکت واقعی:

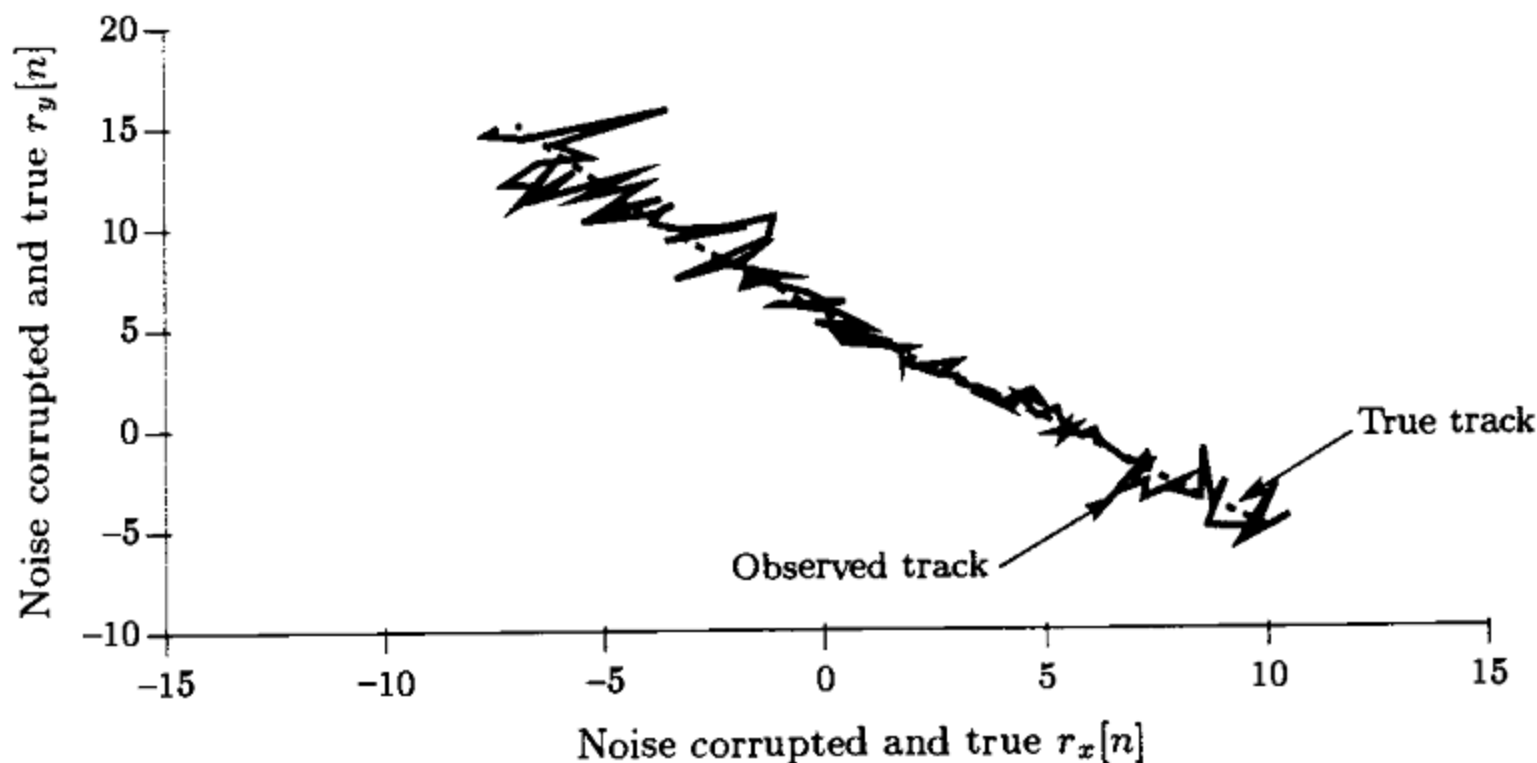


فیلتر کالمن تعمیم یافته

34

□ مثال ۲. ادامه

□ حرکت واقعی و حرکت مشاهده شده:

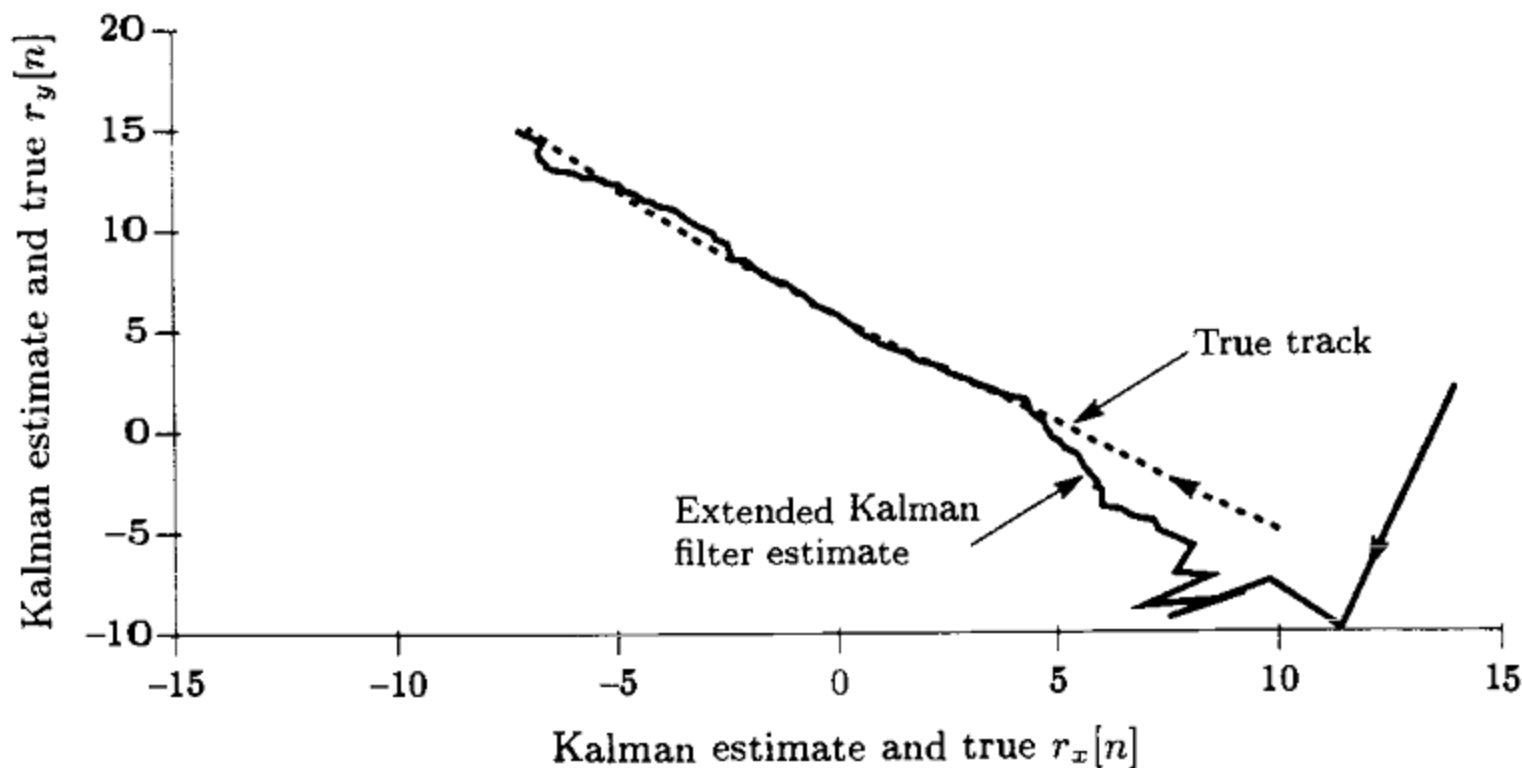


فیلتر کالمن تعمیم یافته

35

□ مثال ۲. ادامه

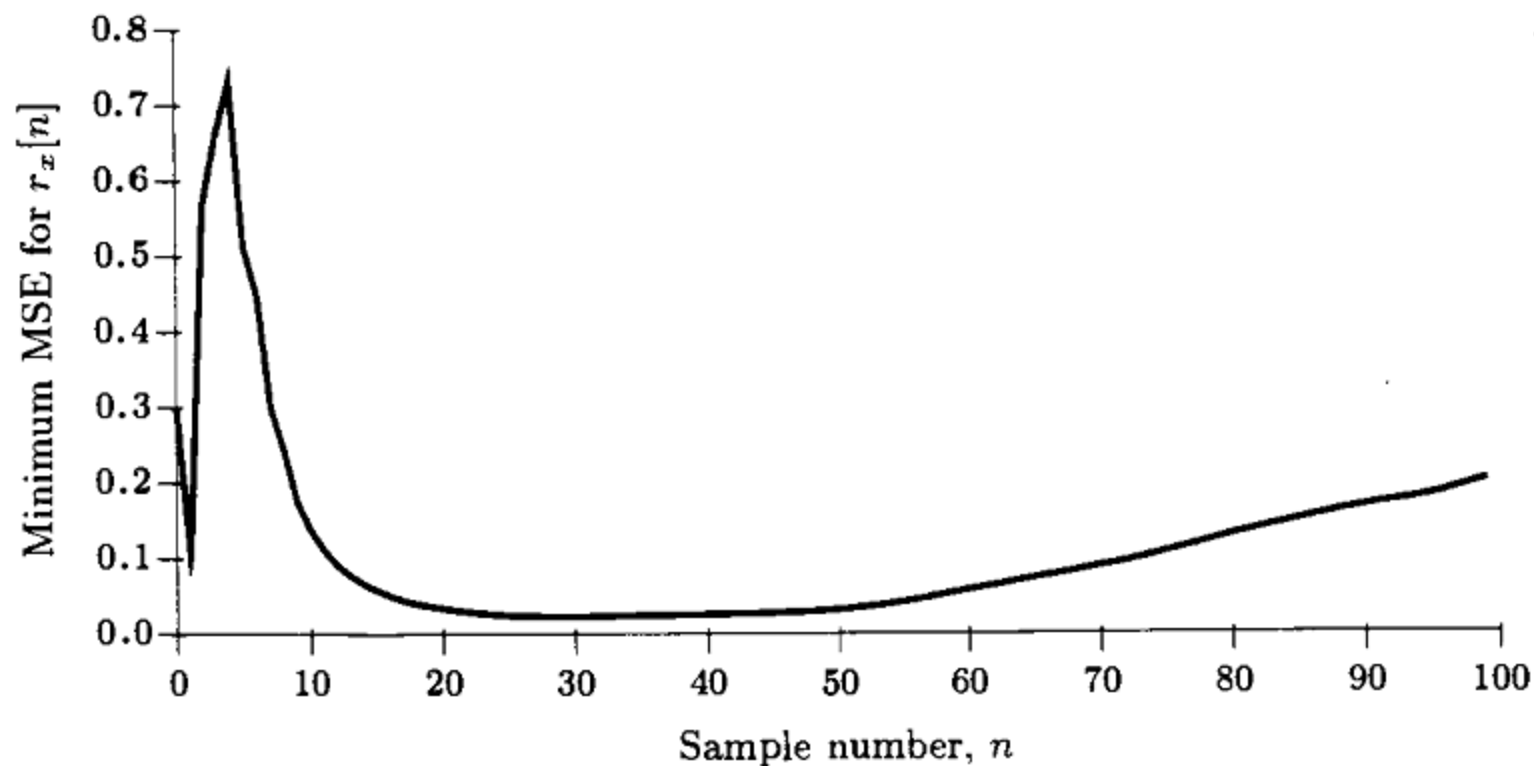
□ مسیر واقعی و مسیر تخمینی به وسیله EKF



فیلتر کالمن تعمیم یافته

36

□ مثال ۲. ادامه

□ خطای اندازه گیری برد x 

فیلتر کالمن تعمیم یافته

37

□ مثال ۲. ادامه

□ خطای اندازه گیری برد y 